BACCALAURÉAT EUROPÉEN

MATHEMATICS 5 PERIODS

EXAMPLES OF FINAL ASSESSMENT

FRENCH / ENGLISH

The structure and content of the final assessment is given in the syllabus:

> **[All] topics from S6 […] could potentially be included.**
>
> The final Baccalaureate written exam will consist of two parts, one part with and one part without a technological tool. Each part will make up 50% of the total 100 marks and will be 120 minutes long. All topics from the S6 and S7 5 Period courses can be examined in the final written Baccalaureate exam.
>
> The overall weighting of the competences will be set by the **Mathematics BAC matrix**. The weightings are designed to ensure meaningful marks across the range of performances. Performances should be distinguishable not only quantitatively ("more or less of the same") but also qualitatively ("different levels of attainment"). This will make the paper accessible to all pupils while providing more challenging problems to obtain higher marks. […]
>
> The part without the technological tool will consist of **six short response questions and two longer questions that require more extended mathematical thinking.** These extended questions could be structured, giving pupils greater guidance, or more open, requiring pupils to develop a suitable strategy for solving the problem.
>
> The part with the technological tool will consist of a smaller number of longer, structured questions that allow pupils to explore a given context in more depth. In general, the level of thinking will increase as a pupil works through the questions. The technological tool will need to be used to fully answer this paper, though this does not exclude the possibility that some questions could be fully answered without the use of the tool.

The structure of the papers should therefore not be as rigid as it was with the previous syllabus. Questions can cover any subject, in any order, and one question can cover more than one part of the syllabus, as is the case for some questions in these examples.

Example paper 2 – part A – solutions

Question A1

Soit f la fonction définie sur $0,+\infty$ par $f(x)=a+b\dfrac{\ln(x)}{x}$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ et une tangente au point d'abscisse 1 d'équation $y=-x+2$.

Déterminer les valeurs de a et de b.

Solution :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. On en déduit que $a=1$.

$f'(x)=b\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ et $f'(1)=-1 \Rightarrow b=-1$

Conclusion : f est la fonction définie sur $0,+\infty$ par $f(x)=1-\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Question A2

Dans un espace à trois dimensions, on considère :

- La droite L_1 de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-3-4\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in R)$
- Le point $A(2;1;-4) \in L_1$
- La droite L_2 de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=10-3\mu \\ y=-21+12\mu \\ z=11-6\mu \end{cases} \quad (\mu \in R)$

Montrer que L_1 et L_2 sont parallèles puis déterminer les coordonnées du point B de la droite L_2 tel que la droite (AB) soit perpendiculaire à L_1 et L_2.

Solution:

• Des vecteurs directeurs de L_1 et L_2 sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\12\\-6\end{pmatrix}$.

$\vec{v}=-3\vec{u}$ donc les droites L_1 et L_2 sont parallèles.

• B $\in L_2$ donc il existe $\mu \in R$ tel que B($10-3\mu,-21+12\mu,11-6\mu$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de L_1 et L_2

$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \Rightarrow 8-3\mu+88-48\mu+30-12\mu=0 \Rightarrow \mu=2$

On en déduit les coordonnées de B : (4, 3, -1)

Question A3
Résoudre dans **R** l'équation $16^{x^2}=2^{4x-1}$. Solution : $\left(2^4\right)^{x^2}=2^{4x-1}$ $4x^2=4x-1$ $4x^2-4x+1=0$ $(2x-1)^2=0$ $x=\frac{1}{2}$

Question A4

Calculate the integral:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)dx.$$

Solution:

$$I=\left[\frac{1}{2}\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(e^{3}-e^{-3}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{-3}-e^{3}\right)=\frac{1}{2}\left(2e^{3}-2e^{-3}\right)=e^{3}-e^{-3}$$

Question A5

A metal chain hangs between two walls
Its height above the ground level can be described by the equation:

$$h(x)=e^{-x}+e^{x-1}+2,$$

where x is the distance in meters along the ground from the left wall.
Calculate how many meters from the left wall this chain is closest to the ground.

Solution:

$$h'(x)=-e^{-x}+e^{x-1}$$
$$h'(x)=0$$
$$-e^{-x}+e^{x-1}=0$$
$$e^{x-1}=e^{-x}$$
$$x-1=-x$$
$$2x=1$$
$$x=\frac{1}{2}$$
$$h''(x)=e^{-x}+e^{x-1}$$
$$h''\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{-1}{2}}+e^{\frac{-1}{2}}=2e^{\frac{-1}{2}}>0$$

The chain is closest to the ground $\frac{1}{2}$ metre from the left wall.

Question A6

Dans le plan complexe, montrer que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'égalité :

$$|z-1-3i|=|z+2-3i|$$

est une droite dont on donnera une équation.

Solution:

On pose $z=x+yi$. On a alors

$$|x+iy-1-3i|=|x+iy+2-3i|$$
$$|x-1+i(y-3)|=|x+2+i(y-3)|$$

Donc $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$

$$(x-1)^2=(x+2)^2$$
$$x^2-2x+1=x^2+4x+4$$
$$x=\frac{-1}{2}$$

Donc l'ensemble des points M est la droite d'équation $x=\frac{-1}{2}$.

Question A7

Un dispositif électronique permet d'obtenir au hasard en entier naturel x compris, au sens large, entre 1 et 999 (on est donc dans une situation d'équiprobabilité). Tout nombre compris entre 10 et 99 est écrit avec deux chiffres et tout nombre compris entre 1 et 9 est écrit avec un seul chiffre ; ainsi le nombre soixante-deux sera affiché 62 et non 062, de même le nombre sept s'écrira 7 et non 007.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir un multiple de 5 est de $\frac{199}{999}$.

2. Calculer la probabilité qu'un même chiffre apparaisse au moins deux fois dans l'écriture de x.

3. Dans cette question on arrondira la probabilité d'obtenir un multiple de 5 à 0,2.
On détermine successivement 5 nombres à l'aide de ce dispositif.
Calculer la probabilité pour que, parmi ces cinq nombres, trois exactement soient des multiples de cinq.

4. On modélise le choix d'un nombre réel x dans l'intervalle $[1\,;999]$ par une variable aléatoire suivant la loi de densité définie par la fonction $f(x)=\frac{1}{998}$.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 5 ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir un réel inférieur ou égal à 500 ?

Solution :

1. Le chiffre des unités d'un multiple de 5 est 0 ou 5 parmi les dix chiffres possibles.
La probabilité d'obtenir un multiple de 5 parmi les entiers entre 0 et 999 est donc de $\frac{2}{10}=\frac{200}{1000}$.
On en déduit que la probabilité d'obtenir un multiple de 5 entre 1 et 999 est $\frac{199}{999}$.

2. On peut d'abord calculer la probabilité que tous les chiffres soient différents.
Si le nombre est à trois chiffres :
On a 9 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0)
On a 9 choix pour le deuxième chiffre (tous sauf le premier)
On a 8 choix pour le troisième chiffre (tous sauf le premier et le deuxième)
Soit : $9.9.8=648$ possibilités.
On a 81 nombres à deux chiffres différents et 9 nombres à un chiffre.
La probabilité que tous les chiffres soient différentes est donc $\frac{738}{999}$.
Par conséquent, la probabilité cherchée est $1-\frac{738}{999}=\frac{261}{999}$

3. Obtenir un nombre est une expérience de Bernoulli
Deux issues : S « le nombre obtenu est un multiple de 5 » et P(S)=$0,2$
$\overline{S}$ « le nombre obtenu n'est pas un multiple de 5 » et $P(\overline{S})=0,8$
L'expérience est répétée 5 fois dans les mêmes conditions et de façon indépendante.
C'est un schéma de Bernoulli.
On appelle X le nombre de succès. X ~ B(5 ;0,2)
P(X=3)=$C_5^3.0,2^3.0,8^2=10.\frac{8}{1000}.\frac{64}{100}=\frac{512}{10000}$

4. **a.** La probabilité d'obtenir un multiple de 5 est nulle, car il s'agit d'une loi continue.
b. La probabilité cherchée est : $\frac{1}{2}=\int_1^{500}\frac{1}{998}dx$.

Question A8
Soit a un nombre réel strictement positif. On considère l'équation $$(E): \ln(x) = ax^2.$$ Etudier le nombre de solutions de cette équation en fonction de la valeur de a.

Solution:

On considère la fonction f définie sur $0,+\infty$ par $f(x)=\ln(x)-a x^2, a>0.$

f est dérivable sur $0,+\infty$ et on a : $f'(x)=\dfrac{1-2a x^2}{x}$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+$		$-$
f	$\Vert$ $\nearrow$	$\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$
	$-\infty$		$-\infty$

$\lim_{x\to 0^{+¿f(x)=-\infty}❑¿}$ ¿

$$f(x)=\ln(x)-a x^2 = x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-a\right)$$

On en déduit que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)-\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=0 \Longleftrightarrow a=\frac{1}{2e}$$

L'équation (E) admet une unique solution si et seulement si $a=\dfrac{1}{2e}$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0 \Longleftrightarrow 0<a<\frac{1}{2e}$$

L'équation (E) admet deux solutions si et seulement si $0<a<\dfrac{1}{2e}$.