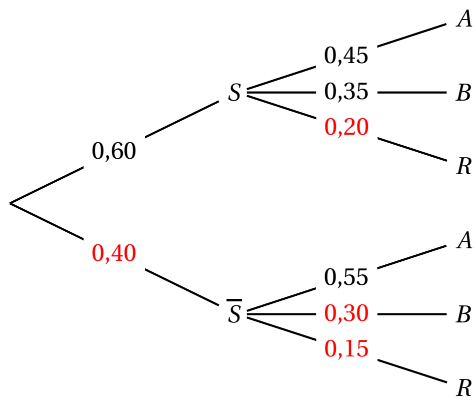
# ∽ Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 31 mars 2005 ∼

**EXERCICE 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

**1.**




**2. a.** Les résidents qui ne louent pas un studio louent un deux-pièces, donc $p\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,60 = 0,40$.

**b.** D'après la formule des probabilités totales :
$1 = p_S(A) + p_S(B) + p_S(R) \iff 1 = 0,45 + p_S(B) + 0,20 \iff p_S(B) = 1 - 0,45 - 0,20 = 0,35$.

**3. a.** • On a $P(R \cap S) = p_S \times p_S(R) = 0,60 \times 0,20 = 0,12$.

• On sait que $p(R) = 0,18$, or $p(R) = p(S \cap R) + p\left(\overline{S} \cap R\right)$ soit $0,18 = 0,12 + p\left(\overline{S} \cap R\right)$, d'où $p\left(\overline{S} \cap R\right) = 0,18 - 0,12 = 0,06$.

**b.** On sait que $p\left(\overline{S} \cap R\right) = p\left(\overline{S}\right) \times p_{\overline{S}}$, d'où $p\left(\overline{S}\right) = \dfrac{p\left(\overline{S} \cap R\right)}{p\left(\overline{S}\right)} = \dfrac{0,06}{0,40} = \dfrac{3}{20} = \dfrac{15}{100} = 0,15$.

**4.** D'après la formule des probabilités totales :
$p(A) = p(S \cap A) + p\left(\overline{S} \cap A\right) = 0,6 \times 0,45 + 0,4 \times 0,55 = 0,27 + 0,22 = 0,49$ soit 49 % : un peu moins de la moitié des loueurs de deux-pièces.

**5. a.** On a $p(S \cap B) = p(S) \times p_S(B) = 0,6 \times (1 - 0,45 + 0,20) = 0,6 \times 0,35 = 0,21$.

| $L_i$ | 350 | 370 | 390 | 480 | 500 | 520 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,12 | 0,27 | 0,21 | 0,06 | 0,22 | 0,12 |

**b.** On a $L = 350 \times 0,12 + 370 \times 0,27 + \cdots + 520 \times 0,12 = 42 + 99,9 + 81,9 + 28,8 + 110 + 62,4 = 425$.
Sur un grand nombre de location chacune d'elle donnera une rentrée de 425 €.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit $f$ la fonction définie sur $]4\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x - 4}$$

1. $f(x) = \dfrac{(-2x+1)(x-4)-8}{x-4} = \dfrac{-2x^2+8x+x-4-8}{x-4} = \dfrac{-2x^2+9x-12}{x-4} = \dfrac{2x^2-9x+12}{4-x}$.
2. $f'(x) = -2 - \dfrac{-8}{(x-4)^2} = -2 + \dfrac{8}{(x-4)^2} = \dfrac{-2(x-4)^2+8}{(x-4)^2} = \dfrac{-2x^2-32+16x+8}{(x-4)^2} = \dfrac{-2x^2+16x-24}{(x-4)^2}$.
3. La courbe $\Gamma$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = 4$.
4. La droite d'équation $y = -2x+1$ est asymptote à la courbe $\Gamma$ car
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-8}{x-4} = 0$.
5. $\left(-x^2+x-8\ln(x-4)\right)' = -2x+1-\dfrac{8}{x-4}$ pour $x > 4$. La fonction
   $x \longmapsto F(x) = -x^2+x-8\ln(x-4)$ est une primitive de $f$ sur $]4\,;\,+\infty[$.

**EXERCICE 3** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

**Partie A : Étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

1. Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}-x}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.
2. Comme $x > 0$, le signe de $f('x)$ est celui de $2-\sqrt{x}$.
   $2-\sqrt{x} > 0 \iff 2 > \sqrt{x} \iff 4 > x$ et de même $2-\sqrt{x} < 0 \iff 2 < \sqrt{x} \iff 4 < x$.
   $f$ est donc croissante sur $]0\,;\,4[$ et décroissante sur $]4\,;\,+\infty[$.
3. D'après la question précédente la fonction $f$ a un maximum :
   $f(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1) \approx -0,614$. Ce résultat montre que sur $]0\,;\,+\infty[$,
   $f(x) < 0 \iff \ln x - \sqrt{x} < 0 \iff \ln x < \sqrt{x}$ (le graphe de la fonction ln est en dessous du graphe de la fonction racine carrée positive.)

**Partie B : Utilisation des théorèmes de comparaisons**

1. En reprenant le résultat précédent pour $x$ réel, $x > 0$, $\ln x < \sqrt{x} \iff$
   $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x} \iff \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
   En reprenant l'encadrement démontré à la question précédente et en prenant les limites en plus l'infini, on en déduit par le théorème des « gendarmes » que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

**EXERCICE 4** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1970 et 2000.

| Année | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Population en milliers d'habitants $y$ | 18 | 21 | 25 | 30 | 36 | 42 | 50 |

**Partie A : Un ajustement affine**

1. La calculatrice donnant après arrondis des coefficients au centième : $y = 1,06x + 15,75$.
   Voir l'annexe.
2. 2003 correspond à $x = 33$, d'où $y = 1,06 \times 33 + 15,75 = 50,73 \approx 51\,000$ (habitants).

**Partie B : Un ajustement exponentiel**

1. Il faut résoudre le système : $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 18 \\ f(30) & = & 50 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a\text{e}^0 & = & 18 \\ a\text{e}^{30b} & = & 50 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 18 \\ 18\text{e}^{30b} & = & 50 \end{array}\right.$
   $\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 18 \\ \text{e}^{30b} & = & \frac{50}{18} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a & = & 18 \\ 30b & = & \ln\left(\frac{50}{18}\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a & = & 18 \\ b & = & \frac{1}{30}\ln\left(\frac{50}{18}\right) \end{array}\right.$
   On trouve $\frac{1}{30}\ln\left(\frac{50}{18}\right) \approx 0,034$.
   On a donc $f(x) \approx 18\text{e}^{0,034x}$.
2. Avec $x = 23$, on obtient $y \approx 18\text{e}^{0,034\times 33} \approx 55,3$ soit à peu près 55 000 habitants.
3. Voir l'annexe.
4. L'ajustement exponentiel est le meilleur : la courbe est plus près des points que la droite.

**Partie C : Calcul d'une valeur moyenne**

1. On a $V_m = \dfrac{1}{30-0}\displaystyle\int_0^{30} f(x)\,\text{d}x = \dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} 18\text{e}^{0,034x}\,\text{d}x$.
   Or une primitive de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{0,034x}$ est la fonction
   $x \longmapsto F(x) = \dfrac{1}{0,034}\text{e}^{0,034x}$, donc :
   $V_m = \dfrac{1}{30}\left[18 \times \dfrac{1}{0,034}\text{e}^{0,034x}\right]_0^{30} = \dfrac{18}{30 \times 0,034}\left[\text{e}^{0,034\times 30} - \text{e}^{0,034\times 0}\right] = \dfrac{18}{0,102}\left[\text{e}^{1,02} - 1\right] \approx 31,92$.
2. Voir le graphique dans l'annexe : on lit en utilisant la fonction exponentielle : $x \approx 17$, ce qui correspond à l'année 1987.

**Annexe à rendre avec la copie**

**Exercice 4**