Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord 1er juin 2005

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Si t est le taux de baisse annuel, la baisse étant de 30 % en 5 ans, on a :
$(1-t)^5 = 1-0,30 \iff 1-t = \sqrt[5]{0,70} \iff t = 1-\sqrt[5]{0,70} \approx 0,0689$.
Le pourcentage de baisse annuel est donc à peu près de 6,89 %.

2. **a.** Les trois baisses conduisent à une baisse de $(1-0,05)\times(1-0,01)\times(1-0,03) = 0,912285$. D'où $1-0,912285 = 0,087715$.
La baisse sur les deux années est donc d'environ 8,77 %.

b. Avec un taux de baisse de t % les deux dernières années on doit avoir :

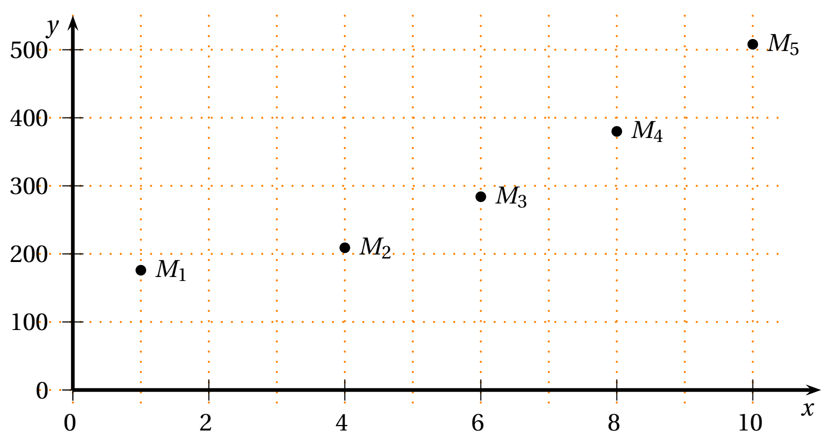
$$0,912285(1-t)^2 = 1-0,30 \iff 1-t = \sqrt{\frac{0,70}{0,912285}} \iff$$

$$t = 1-\sqrt{\frac{0,70}{0,912285}} \approx 0,12404$$

Il faudra donc sur les deux dernières années une baisse annuelle de 12,40 %.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

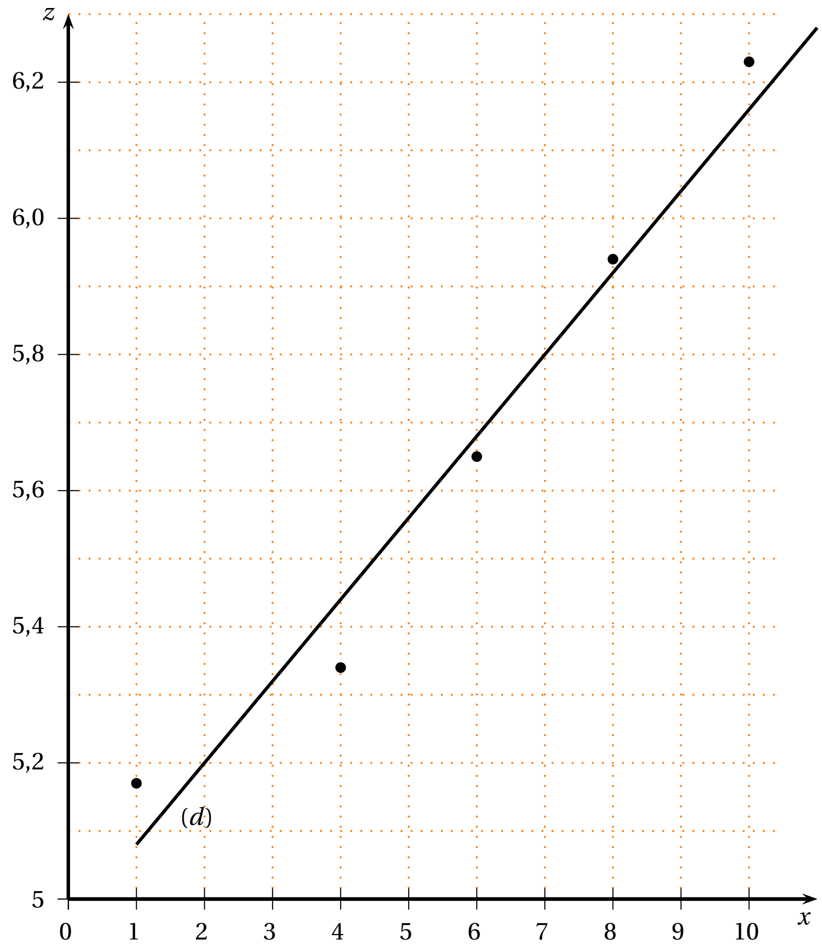


1. Vu la forme du nuage (en particulier le point M_1) un ajustement affine ne parait pas le mieux adapté.

2. **a.**

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
z_i	5,17	5,34	5,65	5,94	6,23

b. Graphique :



3. **a.** La calculatrice donne, en arrondissant les coefficients au centième $z = 0,12x + 4,96$ comme équation de la droite (d) d'ajustement.

b. On a $z = \ln y =$, soit $y = \mathrm{e}^{0,12x+4,96} \iff y = \mathrm{e}^{0,12x} \times \mathrm{e}^{4,96}$.
Or $\mathrm{e}^{4,96} \approx 143$ et $\mathrm{e}^{0,12x} = \left(\mathrm{e}^{0,12}\right)^x \approx 1,13^x$.
Finalement : $y \approx 143 \times 1,13^x$

4. **a.** Pour tracer (d), on peut utiliser les points de coordonnées (2 ; 5,08) et (10 ; 6,16).

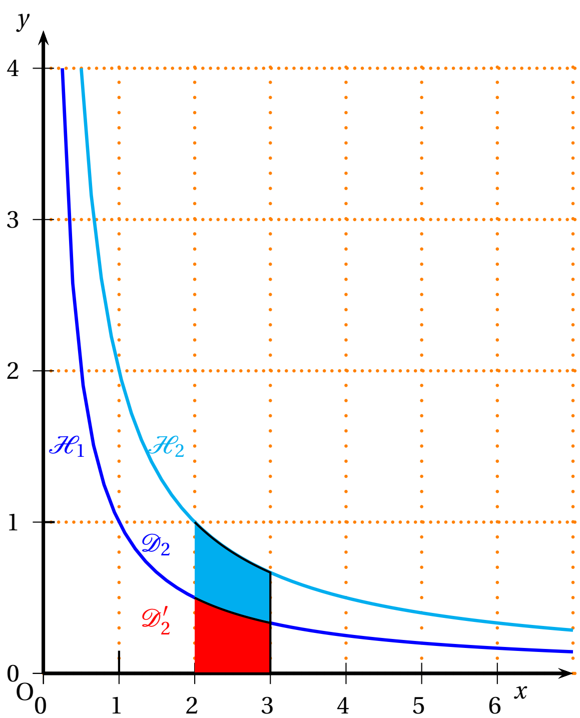
b. 2005 correspond à $x = 12$, d'où $y \approx 143 \times 1,13^{12} \approx 619,837$ soit 619 837 milliers d'euros.

c. Il faut résoudre l'inéquation :

$y > 1000 \iff 143 \times 1,13^x > 1000 \iff 1,13^x > \dfrac{1000}{143} \iff x\ln 1,13 > \ln\left(\dfrac{1000}{143}\right) \iff$

$x > \dfrac{\ln\left(\frac{1000}{143}\right)}{\ln 1,13}$. Or $\dfrac{\ln\left(\frac{1000}{143}\right)}{\ln 1,13} \approx 15,91$. Il faut attendre le rang 16.
On peut prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros en 2009.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématique



1. Voir la figure ci-dessus.
On a $(\mathscr{D}_2) = \displaystyle\int_2^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et $(\mathscr{D}'_2) = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, donc ces deux aires sont égales.
2. On a $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
3. Pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$.
Comme $n^2+2n < n^2+2n+1$ quel que soit le naturel n, $\dfrac{n^2+2}{n^2+2n+1} < 1$ et donc $\ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0$.
Conclusion : $u_{n+1} - u_n < 0$, montre que la suite (u_n) est décroissante.
4. $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et par composition par la fonction logarithme népérien,
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$.
5. On résout l'inéquation $u_n < 0,1 \iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 0,1 \iff \frac{n+1}{n} < \mathrm{e}^{0,1} \iff n+1 < n\mathrm{e}^{0,1} \iff n\left(\mathrm{e}^{0,1} - 1\right) > 1 \iff n > \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{0,1} - 1\right)}$ soit n supérieur à environ 9,5.
Donc $u_n < 0,1$ à partir de $n = 10$. Donc $N = 9$.
6. On a vu que l'aire comprise entre les deux courbes est en unités d'aire égale à l'intégrale de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
L'aire cherchée est donc égale à :
$\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 \approx 2,2$ u. a.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.
Barème : Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0**.**

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE

QUESTIONS	RÉPONSES
1. Soit une série statistique à deux variables $(x\ ;\ y)$. Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 1,35x+22,8$. Les coordonnées du point moyen sont :	☐ (6,5 ; 30,575) ☐ (32, 575 ; 6,5) ☐ (6,5 ; 31,575)
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison -5. Laquelle de ces affirmations est exacte ?	☐ Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 5$ ☐ $u_{10} = u_2 + 40$ ☐ $u_3 = u_7 + 20$
3. L'égalité $\ln\left(x^2-1\right) = \ln(x-1)+\ln(x+1)$ est vraie	☐ Pour tout x de $]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ ☐ Pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1\ ;\ 1\}$. ☐ Pour tout x de $]1\ ;\ +\infty[$
4. Pour tout réel x, le nombre $\dfrac{e^x-1}{e^x+2}$ égal à :	☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+2}$ ☐ $\dfrac{1-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$
5. On pose $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{1}{e^x-1}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{e^x}{e^x-1}\,dx$ alors le nombre $I - J$ est égal à	☐ $\ln\dfrac{2}{3}$ ☐ $\ln\dfrac{3}{2}$ ☐ $\dfrac{3}{2}$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1-\dfrac{2}{100}\right)^x \leqslant 0,5$ est	☐ $S = \left[\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}\ ;\ +\infty\right[$ ☐ $S = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}\right[$ ☐ $S = \left[\ln\dfrac{0,5}{0,98}\ ;\ +\infty\right[$

1. On a $1,35\times 6,5+22,8 = 31,575$: la bonne réponse est le troisième couple.
2. On a par définition pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = -5$ (donc la première égalité est fausse) et $u_n = u_0 - 5n$.
   Donc $u_{10} = u_0 - 50$ et $u_2 + 40 = u_0 - 10 + 40 = u_0 + 30$: la deuxième égalité est fausse.
   Enfin $u_3 = u_0 - 15$ et $u_7 + 20 = u_0 - 35 + 20 = u_0 - 15$. La dernière égalité est vraie.
3. $\ln\left(x^2-1\right)$ existe si $x^2-1 > 0$ qui est vraie pour $x < -1$ ou $x > 1$. La bonne réponse est la première.
4. On obtient la troisième écriture en multipliant chaque terme du quotient par e^{-x}.

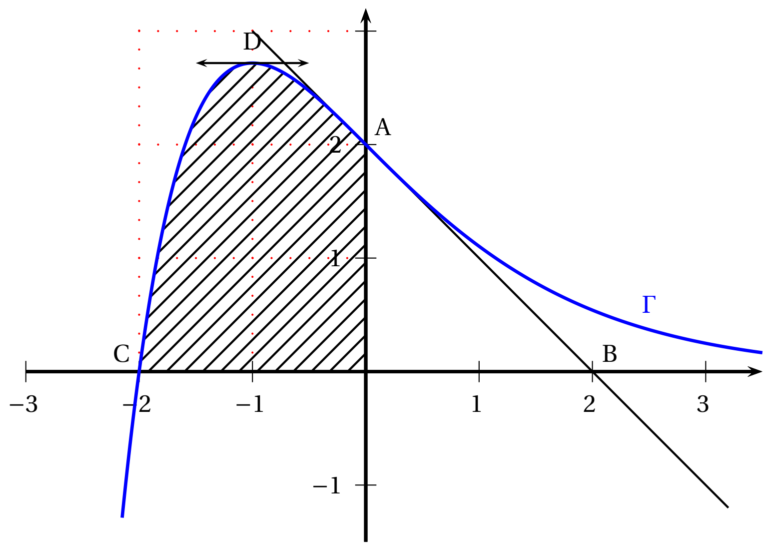
5. On a $\text{I}-\text{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1-\text{e}^x}{\text{e}^x-1}\,\text{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln 3} -1\,\text{d}x = [-x]_{\ln 2}^{\ln 3} = -\ln 2+\ln 3 = \ln 3-\ln 2 = \ln\frac{3}{2}$. C'est la deuxième réponse.

6. $\left(1-\dfrac{2}{100}\right)^x \leqslant 0,5 \iff 0,98^x \leqslant 0,5$, soit en prenant le logarithme népérien $x\ln 0,98 \geqslant \ln 0,5 \iff x \leqslant \frac{\ln 0,5}{\ln 0,98}$: c'est la deuxième réponse.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points A(0; 2) et C(−2 ; 0) et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse −1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. On voit que la fonction est croissante sur $]-\infty\,;\,1[$ puis décroissante.
La dérivée est donc positive sur $]-\infty\,;\,1[$, puis négative : la courbe 1 est la courbe de f'.
La fonction est la dérivée de ses primitives : elle est positive pour $x > -2$: la seule fonction croissante est celle de la courbe 3.

2. **a.** On lit $f(0) = 2$ et $f'(0) = \dfrac{-2}{2} = -1$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \text{e}^{\alpha x} + \alpha(x+K)\text{e}^{\alpha x} = \text{e}^{\alpha x}(\alpha x+\alpha K+1)$.
Or $f(0) = 2 \iff K = 2$ et
$f'(0) = -1 \iff \alpha K+1 = -1 \iff 2\alpha = -2 \iff \alpha = -1$.
Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\text{e}^{-x}$.

3. **a.** La fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x-3)\text{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$\varphi'(x) = -\text{e}^{-x} - (-x-3)\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(-1+x+3) = (x+2)\text{e}^{-x} = f(x)$.

b. La fonction f étant positive sur l'intervalle $[-2\,;\,0]$, l'aire de la surface hachurée est égale à :
$\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\text{d}x = [\varphi(x)]_{-2}^{0} = \left[(-x-3)\text{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = -3-(2-3)\text{e}^2 = \text{e}^2-3 \approx 4,389$, soit environ 4,39 au centième près (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure).