Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

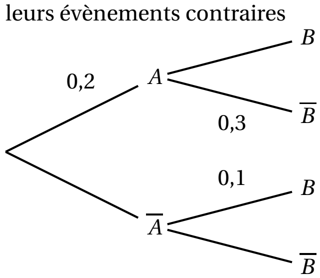
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la bonne affirmation sans justifier votre choix.

Barème :

À chaque question et attribué un certain nombre de points. Une réponse inexacte enlève la moitié des points affectés. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, il est ramené à zéro.

<table>
<tr>
<td>Question 1
Ce tableau incomplet donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.
<table>
<tr><td></td><td>Cadres</td><td>Employés</td></tr>
<tr><td>Hommes</td><td></td><td>25</td></tr>
<tr><td>Femmes</td><td>8</td><td>15</td></tr>
</table>
On interroge une personne au hasard ; la probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre est :</td>
<td>$\dfrac{2}{15}$</td>
<td>$\dfrac{2}{5}$</td>
<td>$\dfrac{8}{23}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 2
Une loi de probabilité d'espérance μ, de variance V et d'écart type σ est définie par le tableau ci-dessous.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr>
</table>
On a alors :</td>
<td>$\text{V} = \dfrac{5}{4}$</td>
<td>$\mu = 2$</td>
<td>$\sigma = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 3
Soient C et D deux évènements indépendants.
On donne $P(C) = \dfrac{1}{3}$ et $P(D) = \dfrac{1}{12}$.
On a alors :</td>
<td>$P(D \cap C) = \dfrac{5}{12}$</td>
<td>$P(C \cup D) = \dfrac{7}{18}$</td>
<td>$P_D(C) = \dfrac{1}{36}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 4
On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :</td>
<td>$\dfrac{1}{4}$</td>
<td>$\dfrac{15}{16}$</td>
<td>$\dfrac{1}{16}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Question 5
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux évènements, $\overline{\text{A}}$ et $\overline{\text{B}}$ leurs évènements contraires


Alors on a :</td>
<td>$P(B) = 0,22$</td>
<td>$P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,8$</td>
<td>$P_B(A) = 0,7$</td>
</tr>
</table>

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f une fonction dont le tableau de variations, incomplet est le suivant ; on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	-6	↘	$\dots$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$\dots$

On admet que f est définie sur $]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

où $a,\ b$ et c sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $a,\ b$ et c.
2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variations ci-dessus, montrer que l'on a : $a = 1,\ b = -1,\ c = 4$.
3. Déterminer les limites manquantes dans le tableau de variations fourni.
4. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet comme asymptote la droite D d'équation $y = x - 1$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote D.
5. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 [f(x) - (x-1)]\,\mathrm{d}x$ et interpréter le résultat en terme d'aire.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.
On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.
Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$\text{(R) Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right).$$

On suppose que $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.
On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

a. Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer U_n en fonction de n.

b. En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$.
En déduire que, pour tout n, on a : $V_n = P_1 - \dfrac{1}{2}P_0$.
Calculer V_n.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.
En déduire une expression de P_n en fonction de n.

d. Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

EXERCICE 3 — 10 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise a noté les valeurs du coût total de production $C(x)$ d'un engrais en fonction de la masse x produite.
Le tableau ci-dessous donne les valeurs x_i de masse d'engrais produite et celles
$y_i = C(x_i)$ des coûts totaux de production correspondants pour i entier variant de 1 à 5.

x_i en tonnes	10	12	14	16	18
y_i en centaines d'euros	100	110	145	196	308

Partie A

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm pour une tonne sur l'axe des abscisses et 0,05 cm pour une centaine d'euros sur l'axe des ordonnées.)
2. On recherche une fonction définie sur l'intervalle $[10\,;\,18]$ dont la courbe représentative « ajuste » de façon acceptable le nuage de points.
Une fonction f est dite « acceptée » si, pour les cinq valeurs x_i du tableau, on a :

$$-10 \leqslant f(x_i) - C(x_i) \leqslant 10.$$

a. Soit f la fonction définie sur $[10\,;\,18]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,3x} + 80.$$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs sont arrondies à 10^{-2}).
La fonction f est-elle « acceptée » ?

x_i	10	12	14	16	18
$f(x_i)$					
$f(x_i) - C(x_i)$					

b. Étudier les variations de f sur $[10\,;\,18]$ et tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère précédent.

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;\,18]$ par

$$g(x) = (0,3x - 1)\mathrm{e}^{0,3x} - 80.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g.
   Montrer que, pour tout x de $[10\,;\,18]$, on a : $g'(x) = 0,09x\text{e}^{0,3x}$.
   En déduire le sens de variations de g sur $[10\,;\,18]$.
2. Établir le tableau de variations de g sur l'intervalle $[10\,;\,18]$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[10\,;\,18]$ et donner un encadrement de α à 10^{-1}.
   En déduire le signe de $g(x)$ sur $[10\,;\,18]$.

Partie C

Le coût moyen de production d'une tonne en fonction de la masse x produite est exprimé en centaines d'euros par :

$$C_m(x) = \frac{f(x)}{x}$$

où f est la fonction étudiée dans la **partie A** et $x \in [10\,;\,18]$.

1. On désigne par C'_m la fonction dérivée de la fonction C_m.
   Calculer $C'_m(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[10\,;\,18]$.
2. Déduire à l'aide de la **partie B** le sens de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[10\,;\,18]$.
3. Pour quelle production, en tonnes, a-t-on un coût moyen minimal ?
   Quel est ce coût à un euro près par défaut ?