Corrigé du baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Il y a $60-(25+8+15)=60-48=12$ cadres hommes, donc 20 cadres en tout dont 8 femmes.

La probabilité est donc égale à $\dfrac{8}{20}=\dfrac{4}{10}=0,4=\dfrac{2}{5}$.

2.

- $\mu=1\times 0,2+2\times 0,4+3\times 0,1+4\times 0,3=2,5$;
- $V=1^2\times 0,2+2^2\times 0,4+3^2\times 0,1+4^2\times 0,3-2,5^2=1,25=\dfrac{5}{4}$; c'est la bonne réponse ;
- $\sigma=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

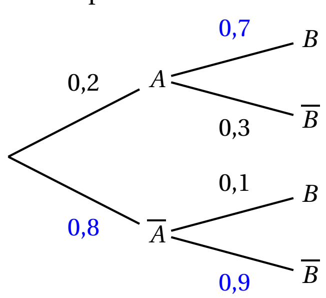
3. C et D étant indépendants, on a $p(C\cap D)=p(C)\times p(D)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{36}$.

D'où : $p(C\cup D)=p(C)+p(D)-p(C\cap D)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{12+3-1}{36}=\dfrac{14}{36}=\dfrac{7}{18}$.

4. La probabilité d'obtenir 0 fois pile est $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$.

Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois pile est : $1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$.

5.



- $p(B)=p(A\cap B)+p\left(\overline{A}\cap B\right)=0,2\times 0,7+0,8\times 0,1=0,14+0,08=0,22$.
- $p\left(\overline{A}\cap B\right)=0,8\times 0,1=0,08$.
- $p_B(A)=\dfrac{p(B\cap A}{p(B)}=\dfrac{0,2\times 0,7}{0,22}=\dfrac{0,14}{0,22}=\dfrac{14}{22}=\dfrac{7}{11}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

2. On a $f'(-3) = f'(1) = 0$, soit :

$a - \dfrac{c}{(-3+1)^2} = a - \dfrac{c}{(1+1)^2} = 0 \Rightarrow a = \dfrac{c}{4} \iff c = 4a$.

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(-3) & = & -6 \\ f(1) & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} -3a+b+\dfrac{4a}{-3+1} & = & -6 \\ a+b+\dfrac{4a}{1+1} & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} -3a+b-2a & = & -6 \\ a+b+2a & = & 2 \end{array}\right. \iff$$

$\left\{\begin{array}{lcr} -5a+b & = & -6 \\ 3a+b & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence) $8a = 8 \iff a = 1$, puis $b = 2-3a = 2-3 = -1$ et $c = 4a = 4$.

Donc $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$.

3.
- on a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{4}{x+1} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = -\infty$;
- on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. On a $f(x) - (x-1) = \dfrac{4}{x+1}$ et on a :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ ce qui montre que la droite D dont une équation est $y = x-1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins et plus l'infini.

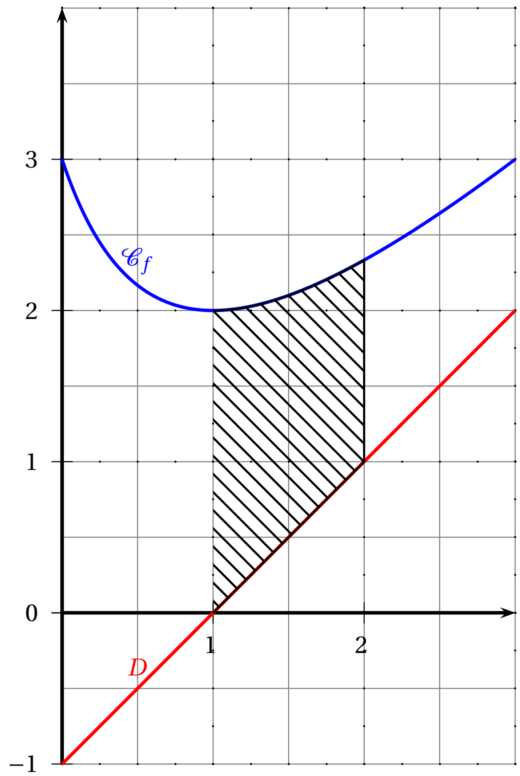
On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x+1} = 0_-$ ce qui signifie qu'au voisinage de moins l'infini la droite D est au dessous de $\mathscr{C}_f$.

D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x+1} = 0_+$ ce qui montre qu'au voisinage de plus l'infini la droite D est au dessus de $\mathscr{C}_f$.

5. On a vu que $f(x) - (x-1) = \dfrac{4}{x+1}$ et cette fonction a pour primitive pour $x > -1$, la fonction $4\ln(x+1)$. Donc :

$\displaystyle\int_1^2 [f(x) - (x-1)]\,\mathrm{d}x = [4\ln(x+1)]_1^2 = 4\ln(2+1) - 4\ln(1+1) = 4(\ln 3 - \ln 2) = 4\ln\frac{3}{2} \approx 1,62.$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{4}{x+1}$ est positive sur $[1 ; 2]$, donc l'intégrale précédente est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, son asymptote D et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. (On vérifie ce résultat sur le graphique ci-dessous)



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Accroissement de la population pendant la première année : $P_1 - P_0 = 60\,000 - 40\,000 = 20\,000$.
   Accroissement de la population pendant la deuxième année :
   $P_2 - P_1 = \dfrac{1}{2}(P_1 - P_0) = \dfrac{1}{2} \times 20\,000 = 10\,000$. Donc $P_2 = P_1 + 10\,000 = 70\,000$.
   Accroissement de la population pendant la troisième année : $P_3 - P_2 = \dfrac{1}{2}(P_2 - P_1) = \dfrac{1}{2} \times 10\,000 = 5\,000$. Donc $P_3 = P_2 + 5\,000 = 75\,000$.
2. $$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$
   a. Quel que soit le naturel n, la relation (R) s'écrit
   $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n$ qui montre que la suite (U_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ de premier terme $U_0 = P_1 - P_0 = 20\,000$
   On sait qu'alors : quel que soit n, $U_n = 20\,000 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   b. $V_{n+1} - V_n = P_{n+2} - \dfrac{1}{2}P_{n+1} - P_{n+1} + \dfrac{1}{2}P_n = P_{n+2} - P_{n+1} - \dfrac{1}{2}P_{n+1} + \dfrac{1}{2}P_n =$
   $\dfrac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) - \dfrac{1}{2}P_{n+1} + \dfrac{1}{2}P_n = \dfrac{1}{2}P_{n+1}\dfrac{1}{2}P_{n+1} - \dfrac{1}{2}P_n + \dfrac{1}{2}P_n = 0.$
   La suite (V_n) est donc constante. En particulier :
   $V_n = V_0 = P_1 - \dfrac{1}{2}P_0$.
   On a donc $V_n = V_0 = P_1 - \dfrac{1}{2}P_0 = 60\,000 - \dfrac{1}{2} \times 40\,000 = 40\,000$.

c. De $\left\{\begin{array}{l c r} U_n & = & P_{n+1} - P_n \\ V_n & = & P_{n+1} - \dfrac{1}{2}P_n \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ (par différence membre à membre

$V_n - U_n = \dfrac{1}{2}P_n \iff P_n = 2\left(V_n - U_n\right)$.

En utilisant les résultats trouvées pour U_n et V_n, on obtient :

$P_n = 2\left(V_n - U_n\right) = 2\left(40\,000 - 20\,000 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 80\,000 - 40\,000 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = 80\,000$.

La population va au bout d'un certain nombre d'années converger vers 80 000 (au bout de 12 ans : 79 990).

EXERCICE 3 **10 points**

Commun à tous les candidats

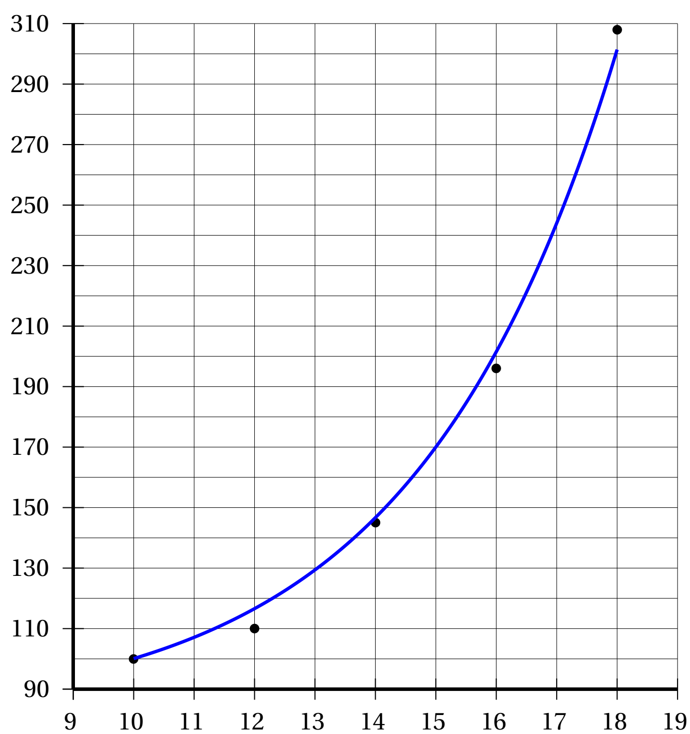
Une entreprise a noté les valeurs du coût total de production $C(x)$ d'un engrais en fonction de la masse x produite.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs x_i de masse d'engrais produite et celles $y_i = C(x_i)$ des coûts totaux de production correspondants pour i entier variant de 1 à 5.

x_i en tonnes	10	12	14	16	18
y_i en centaines d'euros	100	110	145	196	308

Partie A

1.



2. Une fonction f est dite « acceptée » si, pour les cinq valeurs x_i du tableau, on a :

$$-10 \leqslant f(x_i) - C(x_i) \leqslant 10.$$

a.

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,3x} + 80.$$

x_i	10	12	14	16	18
$f(x_i)$	100,09	116,6	146,69	201,51	301,41
$f(x_i) - C(x_i)$	0,09	6,6	1,69	5,5	6,59

Toutes les différences sont inférieures à 10 : la fonction est « acceptée ».

b. Sur $[10\,;18]$, $\quad f'(x) = 0,3\mathrm{e}^{0,3x}$.

Cette fonction est positive donc la fonction est strictement croissante de $f(10) \approx 100,09$ à $f(18) \approx 301,41$.

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire

$$g(x) = (0,3x - 1)\mathrm{e}^{0,3x} - 80.$$

1. Sur $[10\,;18]$, $\quad g'(x) = 0,3\mathrm{e}^{0,3x} + 0,3\mathrm{e}^{0,3x}(0,3x - 1) = \mathrm{e}^{0,3x}(0,09x + 0,3 - 0,3) = 0,09x\mathrm{e}^{0,3x}$.

Tous les termes de cette dérivée sont positifs, donc la fonction g est strictement croissante

2. La fonction est croissante de $g(10) \approx -39,8$ à $g(18) \approx 11\,654,5$

3.
- $g(10) < 0$;
- $g(18) > 0$;
- g est strictement croissante

Il existe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique $\alpha \in [10\ ;\ 18]$ tel que $g(\alpha) = 0$. De $g(11,5) \approx -2,8$ et $g(11,6) \approx 0,5$, on déduit que $11,5 < \alpha < 11,6$.

Conclusion :
- Sur $[10\ ;\ \alpha[$, $\quad g(x) < 0$;
- Sur $]\alpha\ ;\ 18]$, $\quad g(x) > 0$;
- $g(\alpha) = 0$.

Partie C

$$C_m(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. On désigne par C'_m la fonction dérivée de la fonction C_m.

Sur $[10\,;18]$, $\quad C'_m(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \dfrac{0,3x\mathrm{e}^{0,3x} - \mathrm{e}^{0,3x} - 80}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{0,3x}(0,3x-1) - 80}{x^2}$

2. x^2 étant positif, le signe de $C'_m(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{0,3x}(0,3x-1) - 80$ autrement de $g(x)$. Or on a vu à la partie B que cette fonction est négative sur $[10\ ;\ \alpha[$ et positive sur $]\alpha\ ;\ 18]$, donc C_m est une fonction décroissante sur $[10\ ;\ \alpha[$ et croissante sur $]\alpha\ ;\ 18]$.

$C_M(\alpha)$ est donc la valeur minimale de la fonction coût moyen

3. Le coût moyen minimal est d'après la question précédente $C_m(10) = \dfrac{f(10)}{10} \approx 10,009$ centaines d'euros soit 10 009 € à l'euro près. On a vu que

$11,5 < \alpha < 11,6 \iff \dfrac{\mathrm{e}^{3,5} + 80}{11,6} < \dfrac{\mathrm{e}^{0,3\alpha} + 80}{\alpha} < \dfrac{\mathrm{e}^{3,48} + 80}{11,5}$.

On obtient $9,612 < C_m(\alpha) < 9,78$ en centaines d'euros soit en euros entre 961 et 978 euros.
On ne peut pas trouver ce minimum à l'euro près.
Il faut prendre α au millième : $11,585 < \alpha < 11,586$ pour obtenir l'encadrement :
$9,693 < C_m(\alpha) < 9,695$.
Le coût moyen minimal est donc à l'euro près 969 €.