Corrigé du baccalauréat ES Asie juin 2005

Exercice 1 **3 points**
Commun à tous les candidats

Question 1 On a $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = 0,35 \times 0,1 + 0,65 \times 0,5 = 0,035 + 0,325 = 0,36$.
Réponse **d**.
Question 2 On a $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) = 0,35 \times 0,3 + 0,65 \times x = 0,105 + 0,65x$.
A et G étant indépendants, on a :
$P(A \cap G) = P(A) \times P(G)$, soit $0,35 \times 0,3 = 0,35 \times (0,105 + 0,65x) \iff 0,105 = 0,03675 + 0,2275x \iff 0,2275x = 0,06825 \iff x = \dfrac{0,06825}{0,2275} = 0,3$. Réponse **c**.
Question 3 La probabilité de ne jamais obtenir l'évènement A est égale à :
$0,35^0 \times 0,65^4 = 0,17850625$. Réponse **c**.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

$$f(x) = \frac{20}{1 + 15\text{e}^{-0,4x}}.$$

1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,4x = -\infty$, d'où avec $X = -0,4x$, $\lim\limits_{X \to -\infty} \text{e}^X = 0$ et finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 20$.
   Graphiquement : la droite d'équation $y = 20$ est asymptote à la représentation graphique de f au voisinage de plus l'infini.
2. f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = -\dfrac{20 \times 15 \times (-0,4)}{\left(1 + 15\text{e}^{-0,4x}\right)^2} = \dfrac{120}{\left(1 + 15\text{e}^{-0,4x}\right)^2}$.
   Les deux termes du quotient étant supérieurs à zéro, $f'(x) > 0$, ce qui montre que f est croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$

PARTIE B

1. On a donc $Q\left(q~;~\frac{20}{1+15\text{e}^{-0,4q}}\right) = (q~;~f(q))$.
   Le coefficient directeur de la droite OQ est égal à $\dfrac{f(q) - 0}{q - 0} = \dfrac{f(q)}{q}$ soit le coût moyen.
2. Graphiquement on voit que la droite OQ de plus petit coefficient directeur est celle obtenue lorsque la droite est tangente à la courbe Γ. On lit approximativement :
   $q \approx 3,1$.
   Le coût moyen minimum est alors égal à $\dfrac{20}{3,1 \times \left(1 + 15\text{e}^{-0,4 \times 3,1}\right)} \approx 1,21$ (€). (Voir la figure à la fin)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

$$C(x,\ y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. On a $2 \times 12 + 0,5 \times 8^2 + 4 = 24 + 32 + 4 = 60$ qui est la cote de R.
2. $z = 20 \iff 2x + 0,5y^2 + 4 = 20 \iff 2x + 0,5y^2 = 16$: c'est l'équation d'une parabole.

Partie 2

1. Soient x et y les tonnages de métaux respectifs A et B achetés. Il faut que $0,5x + y \leqslant 11$
   Si $x = 4$, alors $0,5 \times 4 + y \leqslant 11 \iff 2 + y \leqslant 11 \iff y \leqslant 9$. L'entreprise peut acheter au maximum 9 tonnes de métal B.
2. Cas général
   On a donc $0,5x + y \leqslant 11 \iff x + 2y = 22$.
3. **a.** $x + 2y = 22 \iff 2y = 22 - x \iff y = 11 - 0,5x$, équation d'une droite contenant par exemple les points $(2\,;\,10)$, $(4\,;\,9)$ et $(8\,;\,7)$.
   b. Graphiquement on lit que pour $x = 14$ et $y = 4$, on a un coût minimum de $2 \times 14 + 0,5 \times 4^2 + 4 = 28 + 8 + 4 = 40$ milliers d'euro.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

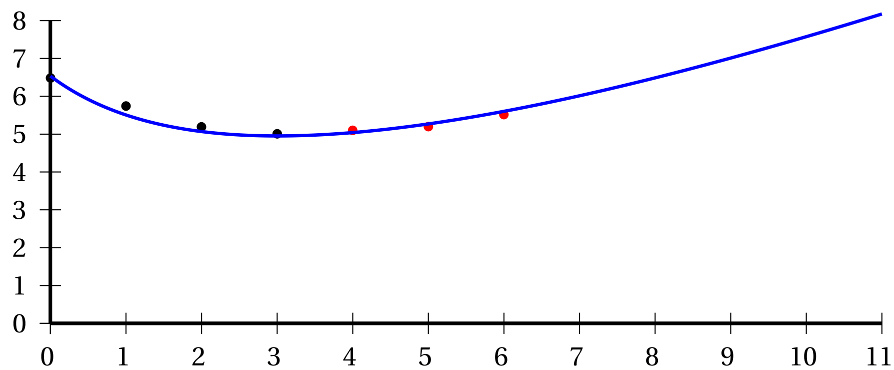
1. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, donc le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la droite, soit $\dfrac{5-0}{1-(-1)} = \dfrac{5}{2} = f'(1)$.
2. • On a vu que $f'(1) = \dfrac{5}{2}$, ce qui élimine la courbe $\mathscr{C}_2$;
   • La courbe $\mathscr{C}_3$ est la représentation d'une fonction positive, donc la fonction f serait strictement croissante ;ce n'est donc elle non plus ;
   • La seule représentation possible est donc $\mathscr{C}_1$.

EXERCICE 4 **9 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. **a.** La calculatrice donne comme équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés $y = -0,496x + 6,349$ les coefficients étant arrondis au millième.

b. 2005 correspond au rang $x = 7$, donc en utilisant l'ajustement affine on obtient $y = -0,496 \times 7 + 6,349 = -3,472 + 6,349 = 2,877$ soit environ 2 877 €.

Partie B

1. Voir plus haut.

2. **a.**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	6,53	5,51	5,07	4,95	5,04	5,27	5,6	6,01	6,49	7,01	7,58	8,18

b. On a $f'(x) = 1 - \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{x+2-5}{x+2} = \dfrac{x-3}{x+2}$. Comme $x \geqslant 0$, $x+2 \geqslant 2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $x-3$.

- $x-3 > 0 \iff x > 3$; sur $]3\,;\,11]$, $f'(x) > 0$, la fonction est croissante ;
- $x-3 < 0 \iff x < 3$; sur $[0\,;\,3[$, $f'(x) < 0$, la fonction est décroissante ;
- $x-3 = 0 \iff x = 3$; $f'(3) = 0$, donc $f(3) = 3 + 10 - 5\ln(3+2) = 13 - 5\ln 5$ est le minimum de la fonction f sur $[0\,;\,11]$.

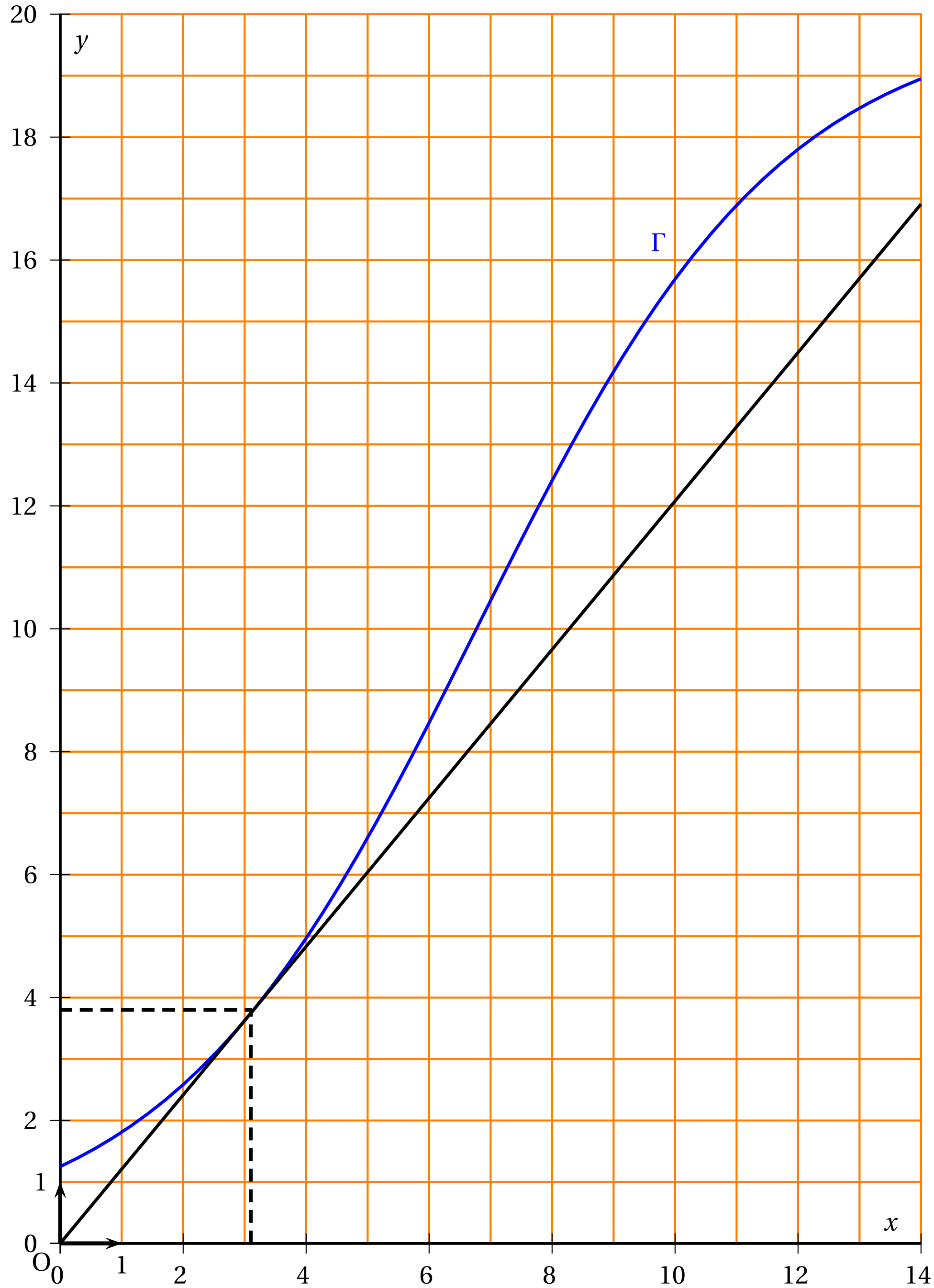
c. Voir plus haut.

3. **a.** 2005 correspond au rang $x = 7$, d'où $f(7) = 7 + 10 - 5\ln(7+2) = 17 - 5\ln 9 \approx 6,014$. Selon ce modèle, le prix d'une tonne de matière première au 1^er^ janvier 2005 serait 6 014 €.

b. Il faut résoudre l'équation : $f(x) = 6,48$. Or sur l'intervalle $[7\,;\,8]$ la fonction est continue, croissante ; $f(7) \approx 6,01$ et $f(8) \approx 6,49$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique de $[7\,;\,8]$ tel que $f(x) = 6,48$.

C'est donc au cours de l'année 2005 que le prix d'une tonne de matière première retrouvera sa valeur de 1998.

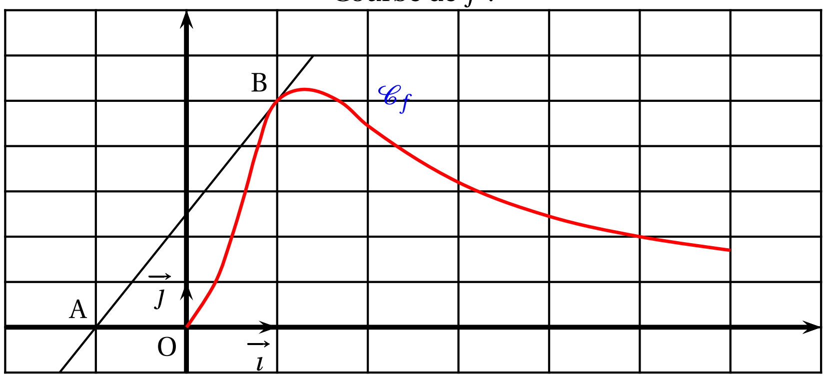
ANNEXE 1
Exercice 2
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie
Courbe Γ



ANNEXE 2

Exercice 3

Courbe de f :



Propositions pour la courbe de f' :

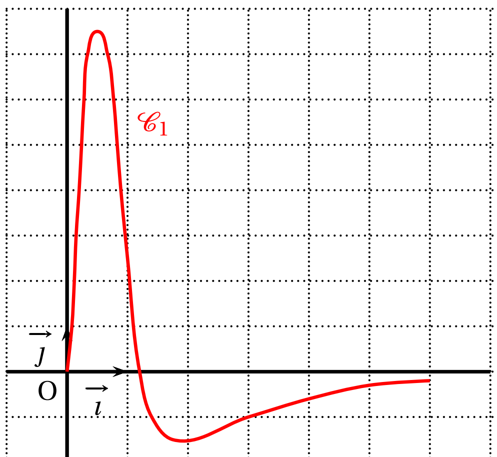


Figure 1

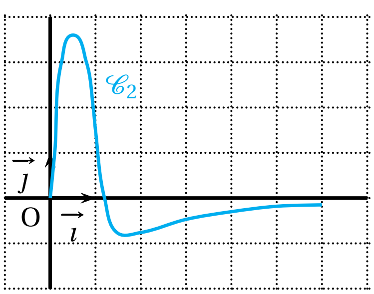


Figure 2

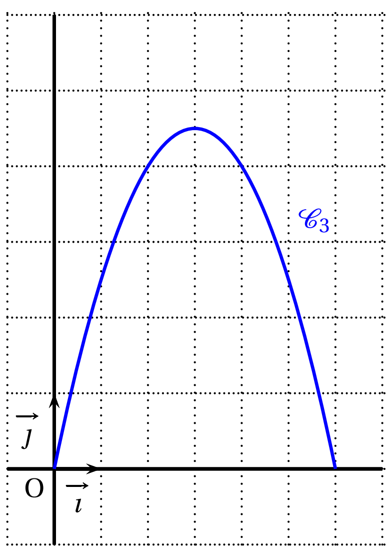


Figure 3

ANNEXE 1
Exercice 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie

Figure 1 : surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$

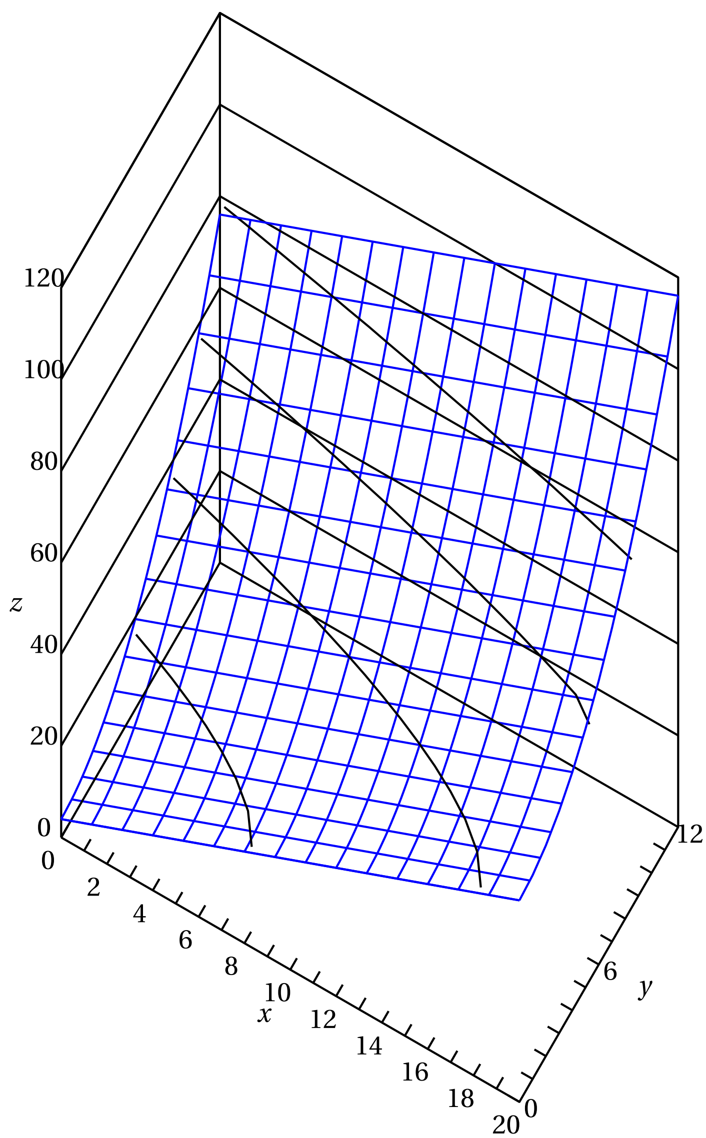


Figure 2 : courbes de niveau