∽ Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers juin 2005 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $(\text{e}x + \ln 2)' = \text{e}$.
2. On a $(\ln(3x) + \ln 3)' = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$ (si $x > 0$).
3. Une primitive est $-\dfrac{1}{2}\text{e}^{-2x+3}$.
4. Posons $X = \text{e}^x$; l'équation devient $X^2 + X - 6 = 0$ qui a pour solution évidente 2. D'où $X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$, donc l'autre solution est $X = -3$. On a donc :
$\left\{\begin{array}{rcr} \text{e}^x & = & 2 \\ \text{e}^x & = & -3 \end{array}\right.$
La première équation a pour solution $\ln 2$, la seconde n'en a pas : l'équation a une solution.
5. Posons $\ln x = X$; l'équation devient $X^2 + X - 6 = 0$ soit d'après la question précédente
$(X-2)(X+3) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcr} \ln x & = & 2 \\ \ln x & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \text{e}^2 \\ x & = & \text{e}^{-3} \end{array}\right.$: l'équation a deux solutions.
6. $1,1^x = 2,2 \iff x \ln 1,1 = \ln 2,2 \iff x = \dfrac{\ln 2,2}{\ln 1,1}$.

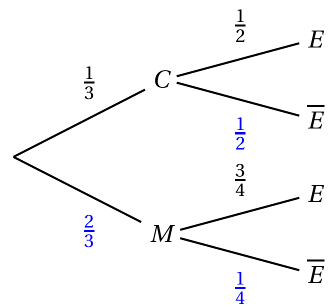
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PREMIÈRE PARTIE :

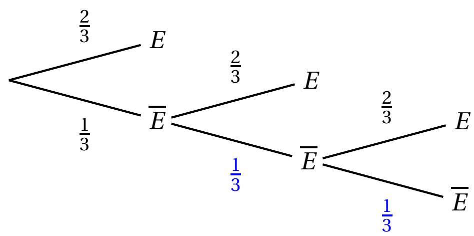
1. On a $p(M \cap E) = p(M) \times p_M(E) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{2}{4}\dfrac{1}{2}$.
2. On a de même $p(C \cap E) = p(C) \times p_C(E) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(E) = p(M \cap E) + p(C \cap E) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.
3. On sait que $p\left(\overline{E}\right) = 1 - p(E) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.
Il faut trouver $p_{\overline{E}}(C) = \dfrac{p\left(\overline{E} \cap C\right)}{p\left(\overline{E}\right)} = \dfrac{p\left(C \cap \overline{E}\right)}{p\left(\overline{E}\right)}$.
Or $p\left(C \cap \overline{E}\right) = p(C) \times p_C\left(\overline{E}\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.
Donc $p_{\overline{E}}(C) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{1} = \dfrac{1}{2}$. (*Certaines de ces réponses pourront être justifiées à l'aide d'un arbre de probabilités*)

Arbre de probabilités :



DEUXIÈME PARTIE :

1.



2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés. On a :

$p(X=5)=\dfrac{2}{3}$;

$p(X=2)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$;

$p(X=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$.

$p(X=0)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$.

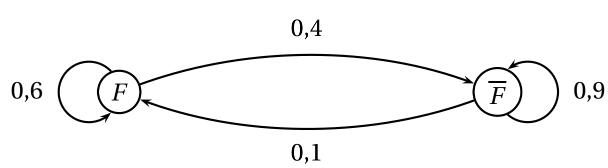
Vérification : $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{1}{27}=\dfrac{18+6+2+1}{27}=\dfrac{27}{27}=1$.

3. On a $E=5\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{2}{9}+1\times\dfrac{2}{27}+0\times\dfrac{1}{27}=\dfrac{90+12+2+0}{27}=\dfrac{104}{27}\approx 3,85$ points.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.



Au rang $n+1$, les fumeurs viennent des 60 % de fumeurs de l'année n et de 10 % des non-fumeurs de l'année n, soit :

$f_{n+1}=0,6f_n+0,1g_n$.

De même les non-fumeurs viennent des 40 % de fumeurs de l'année n et de 90 % des non-fumeurs de l'année n, soit :

$g_{n+1}=0,4f_n+0,9g_n$. Ce qui se traduit matriciellement par :

$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_n & g_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,1 & 0,9\end{pmatrix}$

3. On a donc $f_1=0,6f_0+0,1g_0=0,6\times 0,5+0,1\times 0,5=0,35$. Et donc $g_1=0,65$.

Puis $f_2=0,6f_1+0,1g_1=0,6\times 0,35+0,1\times 0,65=0,21+0,065=0,275$.

4. La matrice de transition étant non nulle, il existe donc un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ (avec $x + y = 1$) tel que :

$P = P \times M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \iff$

$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,6x + 0,1y \\ y & = & 0,4x + 0,9y \end{array} \right.$.

On a donc $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,6x + 0,1y \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,6x + 0,1y \\ y & = & 1 - x \end{array} \right. \iff$

$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,6x + 0,1(1 - x) \\ y & = & 1 - x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,6x + 0,1 - 0,1x \\ y & = & 1 - x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,5x & = & 0,1 \\ y & = & 1 - x \end{array} \right. \iff$

$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,2 \\ y & = & 1 - x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,2 \\ y & = & 0,8 \end{array} \right.$ Donc $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

À terme il y aura donc 20 % de fumeurs.

5. On a pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1g_n$; or $g_n = 1 - f_n$, donc :
$f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1\left(1 - f_n\right) = 0,6f_n + 0,1 - 0,1f_n = 0,5f_n + 0,1$.

6. **a.** On a pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f_{n+1} - 0,2 = 0,5f_n + 0,1 - 0,2 = 0,5f_n - 0,1 = 0,5\left(f_n - 0,2\right) = 0,5u_n$.

L'égalité vraie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = f_0 - 0,2 = 0,5 - 0,2 = 0,3$.

b. On sait que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 0,3 \times 0,5^n$.

c. On a $u_n = f_n - 0,2 \iff f_n = u_n + 0,2 = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.

d. Comme $0 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,5^n = 0$ et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = 0,2$.

On retrouve le fait qu'à terme le nombre de fumeurs va tendre vers les 20 %.

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

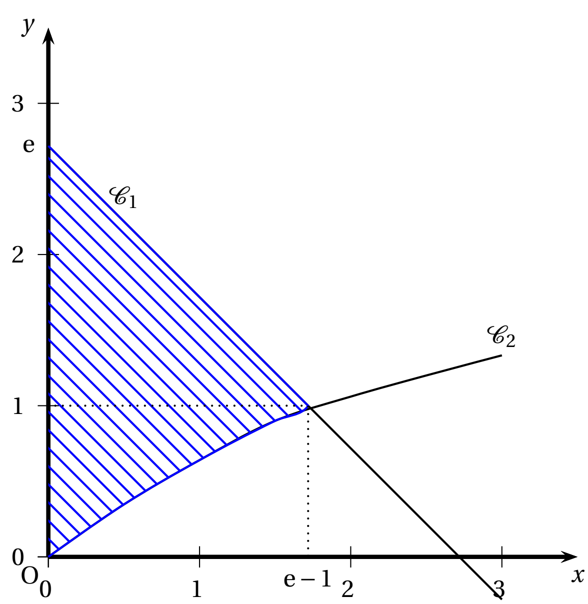


Figure 1

1. La courbe de la figure 3 ne peut convenir : en effet d'après la figure 1, on a $f_1(\mathrm{e}-1) = f_2(\mathrm{e}-1)$, donc $f(\mathrm{e}-1) = f_1(\mathrm{e}-1) - f_2(\mathrm{e}-1) = 0$: seule la figure 2 a cette propriété.
2. **a.** • Sur $[0\,;\,\mathrm{e}-1]$; $f(x) > 0$;
   • Sur $[\mathrm{e}-1\,;\,3]$; $f(x) < 0$.
   • $f(\mathrm{e}-1) = 0$.

   b. f étant décroissante, on a $f'(x) < 0$ sur $[0\,;\,3]$.
3. Les variations de F sont données par le signe de sa dérivée $f(x)$. Donc :
   • Sur $[0\,;\,\mathrm{e}-1]$, $f(x) > 0$: F est croissante ;
   • Sur $[\mathrm{e}-1\,;\,3]$, $f(x) < 0$ F est décroissante.
4. L'une des trois fonctions représentées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction F.

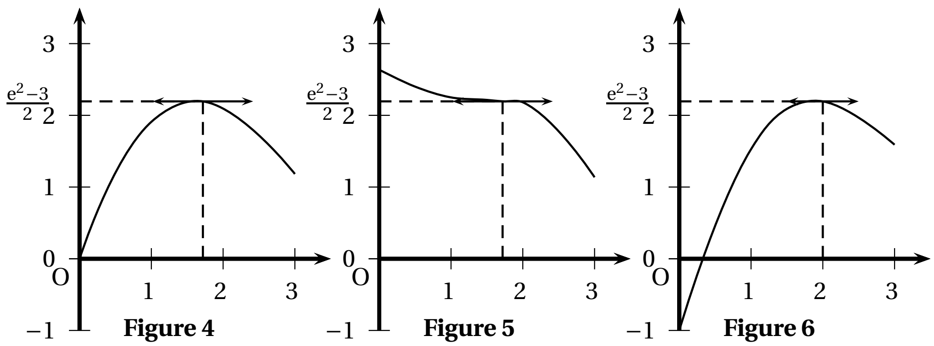


Figure 4 **Figure 5** **Figure 6**

   La courbe de la figure 5 ne peut convenir car elle ne représente pas une fonction croissante sur $[0\,;\,\mathrm{e}-1]$.
   La courbe de la figure 5 ne peut convenir car représente pas une fonction croissante sur $[0\,;\,2]$.
5. D'après la question précédente la bonne représentation de la primitive F est la figure 4. On a donc $F(\mathrm{e}-1) = \dfrac{\mathrm{e}^2-3}{2}$ et $F(0) = 0$.
   Donc $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}-1} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\mathrm{e}-1} = F(\mathrm{e}-1) - F(0) = \frac{\mathrm{e}^2-3}{2}$.
6. Sur l'intervalle $[0\,;\,\mathrm{e}-1]$, la fonction f_2 est positive, donc l'aire de la surface hachurée est égale à l'aire du trapèze rectangle de bases 1 et e et de hauteur $\mathrm{e}-1$, diminuée de l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \mathrm{e}-1$.
   L'aire hachurée est donc égale à :
   $\dfrac{1+\mathrm{e}+1}{2} \times (\mathrm{e}-1)\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(\mathrm{e}+2)(\mathrm{e}-1-}{2} - [F(x)]_0^{\mathrm{e}-1} = \frac{(\mathrm{e}+2)(\mathrm{e}-1)}{2} - \frac{\mathrm{e}^2-3}{2} =$
   $\dfrac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}-2-\mathrm{e}^2+3}{2} = \dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$ (u. a.).

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. 2004 correspond à $x = 6$, d'où $Y = 0,14 \times 6 + 6,397 = 0,84 + 6,397 = 7,237$.
   Comme $Y = \ln y = 7,237 \iff y = \mathrm{e}^{7,237} \approx 1389,9$ soit environ 1 390 adhérents.
2. **a.** On a donc $Y = \ln y = 0,14x + 6,397 \iff y = \mathrm{e}^{0,14x+6,397} = \mathrm{e}^{0,14x} \times \mathrm{e}^{6,397} = \left(\mathrm{e}^{0,14}\right)^x \times \mathrm{e}^{6,397} \approx 1,15^x \times 600 = 600 \times 1,15^x$.

b. Voici le tableau avec une augmentation annuelle de 15 % :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	600	690	794	913	1 045	1 207
augmentation de 15 %	600	690	794	913	1 050	1 207

On obtient les nombres réels à l'exception de l'année 2002, mais peu s'en faut.

Deuxième partie : Étude du nombre d'adhérents à partir de l'année 2004

$$f(x) = \frac{3\,600}{1+0,5\mathrm{e}^{-x}}.$$

1. On a donc $u_n = \dfrac{3\,600}{1+0,5\mathrm{e}^{-n}}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 3\,600$.

2. a.

Année	2005	2006	2007	2008	2009
n	1	2	3	4	5
$f(n)$	3 041	3 372	3 513	3 567	3 588

Rem. la valeur donnée dans le tableau est fausse.

b. $M = \dfrac{3\,041+3\,372+3\,513+3\,567+3\,588}{5} = 3\,416.$

3.

$$F(x) = 3\,600 \ln\left(\mathrm{e}^x + 0,5\right).$$

a. F est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$F'(x) = \dfrac{3\,600\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+0,5} = \dfrac{3600\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x+0,5\right)} = \dfrac{3\,600}{1+0,5\mathrm{e}^{-x}} = f(x).$

Ce résultat montre que F est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. On sait que $\mu = \dfrac{1}{5,5-0,5}\displaystyle\int_{0,5}^{5,5} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}[F(x)]_{0,5}^{5,5} = \frac{1}{5}\left[3\,600\ln\left(\mathrm{e}^{5,5}+0,5\right) - 3\,600\ln\left(\mathrm{e}^{0,5}+0,5\right)\right] \approx$ 3 411.