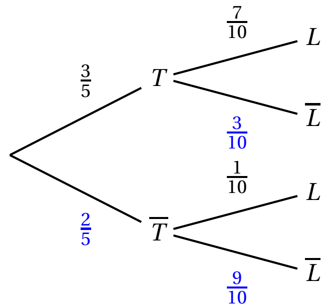
ൟ Corrigé du baccalauréat ES La Réunion juin 2005 ൟ

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** On a $p(T \cap L) = p(T) \times p_T(L) = \frac{3}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{50} = \frac{42}{100} = 0,42$.

b. D'après la loi des probabilités totales :

$p(L) = p(T \cap L) + p\left(\overline{T} \cap L\right)$.

$p\left(\overline{T} \cap L\right) = p\left(\overline{T}\right) \times p_{\overline{T}}(L) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 0,04$.

Donc $p(L) = p(T \cap L) + p\left(\overline{T} \cap L\right) = 0,42 + 0,04 = 0,46$.

c. On a $p\left(\overline{T} \cap \overline{L} \cap\right) = p_{\overline{T}}\left(\overline{L}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{50} = \frac{36}{100} = 0,36$.

3. On a $p_L(T) = \dfrac{p(L \cap T)}{p(L)} = \dfrac{p(T \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0,42}{0,46}\dfrac{42}{46} = \dfrac{21}{23}$.

4. **a.** Achat des deux appareils : dépense : $(500 + 200) \times 0,75 = 175 \times 3 = 525$ €.

Achat du téléviseur seul : dépense : $500 \times 0,85 = 425$ €.

Achat du lecteur de DVD seul : dépense : $200 \times 0,85 = 170$ €.

Aucun achat : dépense : 0 €.

b.

D	525	425	170	0
$p(D)$	0,42	0,18	0,04	0,36

c. On a $E(D) = 525 \times 0,42 + 425 \times 0,18 + 170 \times 0,04 + 0 \times 0,36 = 303,80$.

d. Le résultat précédent donne la moyenne d'achat d'un client quelconque sur un grand nombre de visiteurs. En supposant ce résultat vrai pour 80 personnes le chiffre d'affaires espéré sera de :

$80 \times 303,80 = 24\,304$ €.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Il faut résoudre l'inéquation : $0,98^n \leqslant 0,5 \iff n \ln 0,98 \leqslant \ln 0,5 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,98}$. Or $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,98} \approx 34,3$: il faut attendre 35 ans.

2. Soit t ce pourcentage ; le prix est multiplié par $1 + t$ puis par $1 - t$ soit finalement par $1 - t^2$: il a donc baissé.

3. Soit t ce taux d'accroissement moyen sur les 40 ans ; on a donc :

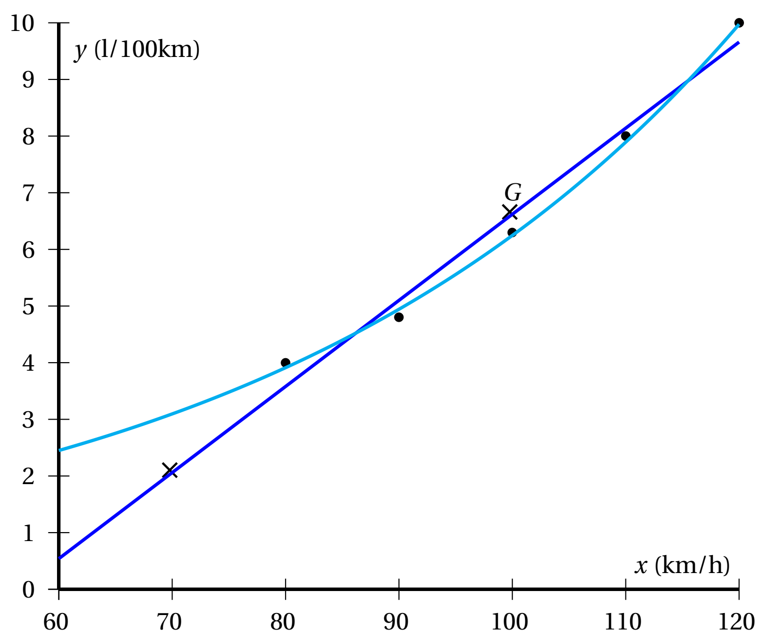
$(1 + t)^{40} = 2 \iff 1 + t = 2^{\frac{1}{40}} \iff t = 2^{\frac{1}{40}} - 1 \approx 0,01748$ soit environ 1,75 %.

4. $(e^x)^2 \times e^{3x-1} = e^{2x} \times e^{3x-1} = e^{2x+3x-1} = e^{5x-1} = e^{5x} \times e^{-1} = \dfrac{e^{5x}}{e}$.
5. Réponse D car $\ln e^{-2} = -2$.
6. Si $x+3>0$, soit $x>-3$, $\ln(x+3) < \ln 6 \iff x+3<6 \iff x<3$.
   Les nombres solutions sont les réels de l'intervalle $]-3\ ;\ 3[$.
7. L'intégrale est égale à $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^4 = \dfrac{4^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = \dfrac{64-1}{3} = \dfrac{63}{3} = 21$.
8. La valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ est égale : $\dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,[\ln x]_1^3 =$
   $\dfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \dfrac{\ln 3}{2} = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{3}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Si la consommation était proportionnelle à la vitesse d'après les éléments de la première colonne le coefficient multiplicateur (de bas en haut) serait égal à 20 : ce n'est pas le cas.
2. **a.**



   b. On a $\dfrac{4+4,8+6,3+8+10}{5} = \dfrac{33,1}{5} = 6,62$.
   $\dfrac{80+90+100+110+120}{5} = \dfrac{500}{5} = 100$.
   On a donc $G(100\ ;\ 6,62)$.

   c. La calculatrice donne $y = 0,152x - 8,58$ comme droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
   On a déjà le point G; on peut utiliser le point de coordonnées $(70\,;\,2{,}06)$

   d. Avec $x = 130$, on obtient $y = 0,158 \times 130 - 8,58 = 11,96$.
3. $z = 0{,}0234x - 0{,}5080$.

   a. Comme $z = \ln y$ et $z = 0{,}0234x - 0{,}5080$, on a donc :
   $\ln y = 0{,}0234x - 0{,}5080 \iff y = e^{0{,}0234x - 0{,}5080}$, soit $y = e^{0{,}0234x} \times e^{-0{,}5080}$.
   Or $e^{-0{,}5080} \approx 0,6017$, donc $y = 0,6017e^{0{,}0234x}$.

b. Voir la courbe ci-dessus.

c. Avec $x = 130$, on obtient avec cet ajustement :
$y = 0,6017\mathrm{e}^{0,0234\times 130} \approx 12,60$, soit environ 12,6 l aux 100 km.

4. L'ajustement exponentiel est plus proche de la réalité des mesures que l'ajustement linéaire ; 12,6 est donc la consommation la plus probable.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a.
- $u_0 = 1\,500$;
- $u_1 = 1\,500 \times 0,9 + 100 = 1\,350 + 100 = 1\,450$;
- $u_2 = 1\,450 \times 0,9 + 100 = 1\,305 + 100 = 1\,405$.
- $u_1 - u_0 = 50$ et $u_2 - u_1 = 45$: la suite n'est pas arithmétique.
- $\dfrac{u_1}{u_0} \approx 0,967$ et $\dfrac{u_2}{u_1} \approx 0,969$: la suite n'est pas géométrique.

b. Enlever 10 % à l'effectif c'est le multiplier par 0,9, donc d'une année sur l'autre on multiplie l'effectif par 0,9 et on l'augmente de 100, soit
$u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

2. a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000 = 0,9u_n + 100 - 1\,000 = 0,9u_n - 900 = 0,9\left(u_n - 1\,000\right) = 0,9v_n$.
L'égalité $v_{n+1} = 0,9v_n$ vraie pour tout naturel montre que la suite v_n est géométrique de raison 0,9 de premier terme $v_0 = u_0 - 1\,000 = 1\,500 - 1\,000 = 500$.

b. On sait qu'alors quel que soit le naturel n, $v_n = 500 \times 0,9^n$.
Or $v_n = u_n - 1\,000 \iff u_n = v_n + 1\,000 = 500 \times 0,9^n + 1\,000$.

c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\,000$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 500 \times 0,9^{n+1} + 1\,000 - \left(500 \times 0,9^n + 1\,000\right) = 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n + +1\,000 - +1\,000 = 500 \times 0,9^n (0,9 - 1) =$
$-0,1 \times 500 \times 0,9^n = -50 \times 0,9^n$.
Comme $0,5 > 0$ et $0,9^n > 0$ quel que soit le naturel n, on a donc pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite u est donc décroissante.

4. Il faut donc trouver n tel que $u_n < 1\,500 - 300 \iff u_n < 1\,200$, soit :
$500 \times 0,9^n + 1\,000 < 1\,200 \iff 500 \times 0,9^n < 200 \iff$
$0,9^n < \dfrac{200}{500} \iff 0,9^n < 0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $n \ln 0,9 < \ln 0,4 \iff n > \dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,9}$.
Or $\dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,9} \approx 8,7$. Il faut donc au moins $n = 9$. L'entreprise ne sera plus en sur-effectif à partir de 2014.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

x	0		$\frac{1}{\text{e}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$-\text{e}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

1. • Sur $]0~;~1[\cup]1~;~+\infty[$ la fonction f est dérivable et sur cet ensemble :

   $f'(x)=-\dfrac{\ln x+x\times\frac{1}{x}}{(x\ln x)^2}=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}$.

   Comme $(x\ln x)^2>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(\ln x+1)$:

   – $-(\ln x+1)>0 \iff -1>\ln x \iff \text{e}^{-1}>x \iff x<\text{e}^{-1}$: la fonction est donc croissante sur $]0~;~\text{e}^{-1}[$;

   – $-(\ln x+1)<0 \iff -1<\ln x \iff \text{e}^{-1}<x \iff x>\text{e}^{-1}$: la fonction est donc décroissante sur $]\text{e}^{-1}~;~1[$ et sur $]1~;~+\infty[$.

   – $-(\ln x+1)<0 \iff x=\text{e}^{-1}$: $f'\left(\text{e}^{-1}\right)=0$; donc $f\left(\text{e}^{-1}\right)$ est un maximum de la fonction ; $f\left(\text{e}^{-1}\right)=\dfrac{1}{\text{e}^{-1}\ln\text{e}^{-1}}=-\dfrac{1}{\frac{1}{\text{e}}}=-\text{e}$.

   • Comme $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$.

   • Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. D'après le résultat précédent $\mathscr{C}$ a une asymptote verticale d'équation $x=0$ et une asymptote horizontale $y=00$ au voisinage de plus l'infini.

3. **a.** Une équation de la tangente est : $y-f\left(\frac{1}{\text{e}}\right)=f'\left(\frac{1}{\text{e}}\right)\left(x-\frac{1}{\text{e}}\right)$.

   $f'\left(\frac{1}{\text{e}}\right)=-\dfrac{\ln\frac{1}{\text{e}}+1}{(\frac{1}{\text{e}}\ln\frac{1}{\text{e}})^2}=-\dfrac{-\ln\text{e}+1}{(-\frac{1}{\text{e}}\ln\text{e})^2}=0$.

   $f\left(\frac{1}{\text{e}}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{\text{e}}\times\ln\frac{1}{\text{e}}}=\dfrac{1}{\frac{1}{\text{e}}\times(-1)}=-\text{e}$.

   Donc une équation de la tangente est : $y-(-\text{e})=0\left(x-\frac{1}{\text{e}}\right) \iff y=-\text{e}$.

   b. Une équation est : $y-f(\text{e})=f'(\text{e})(x-\text{e})$.

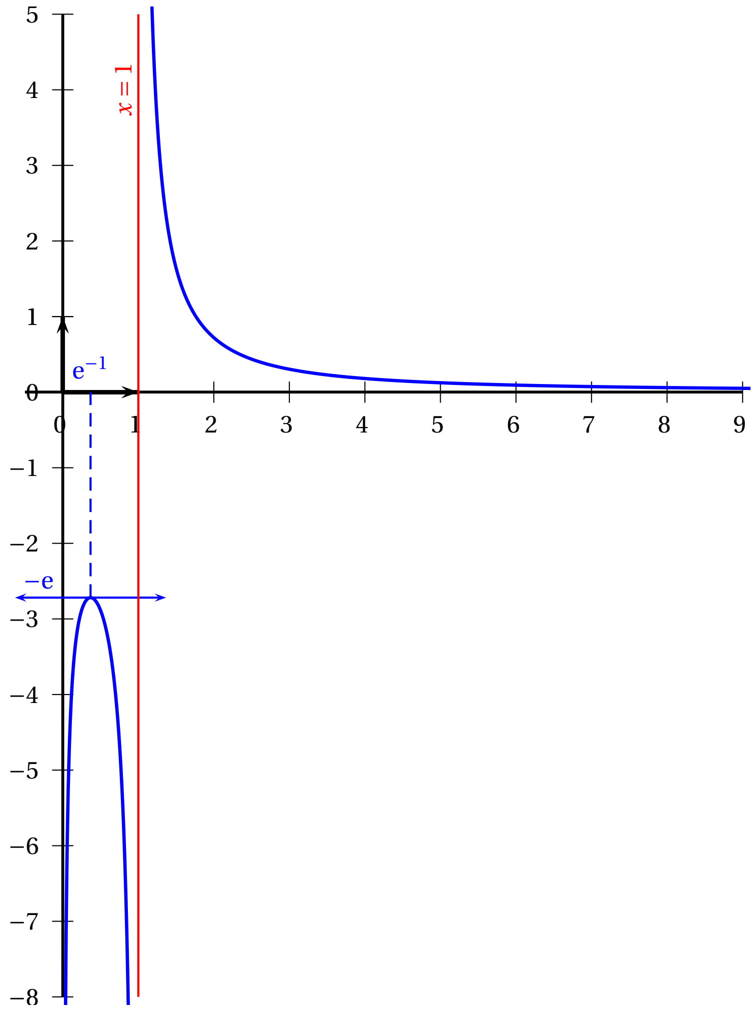
   $f'(\text{e})=-\dfrac{\ln\text{e}+1}{(\text{e}\ln\text{e})^2}=-\dfrac{2}{\text{e}^2}=-2\text{e}^{-2}$.

   $f(\text{e})=\dfrac{1}{\text{e}\ln\text{e}}=\dfrac{1}{\text{e}}=\text{e}^{-1}$.

   L'équation devient :

   $y-=-2\text{e}^{-2}(x-\text{e} \iff y=-2\text{e}^{-2}x+\text{e}^{-1}+2\text{e}^{-1} \iff y=-2\text{e}^{-2}x+3\text{e}^{-1}$.

4.



a. Graphiquement l'équation n'a pas de solution si $-e < k < 0$;

b. Graphiquement l'équation a une solution unique si $k = -e$ ou si $0 < k < +\infty$;

c. Graphiquement l'équation a deux solutions distinctes si $k < -e$.