∽ Corrigé du baccalauréat ES Métropole juin 2005 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

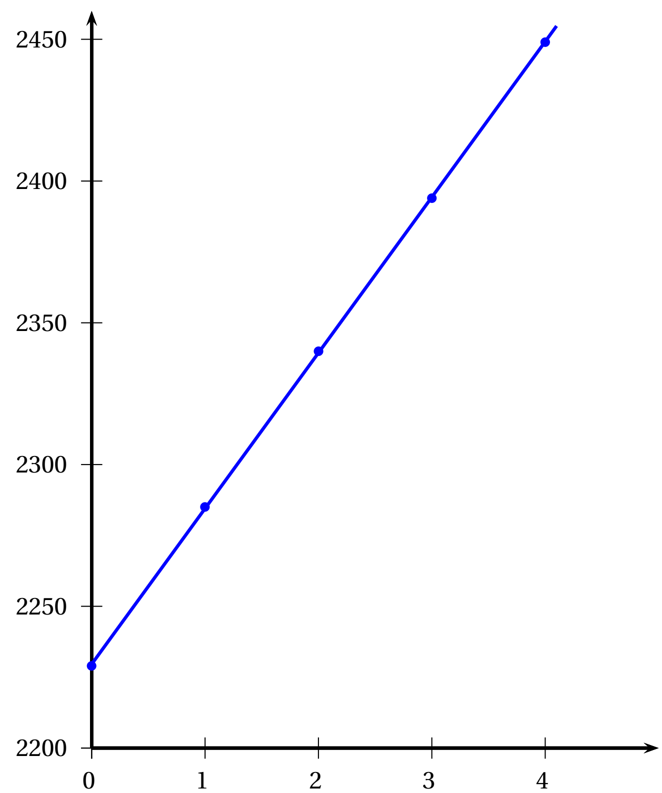
Commun à tous les candidats

1. La droite d'équation $y = 4$ est asymptote à $\mathscr{C}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.
2. f a un minimum pour $x = 0$, donc $f'(0) = 0$.
3. Une équation de la la tangente en A à $\mathscr{C}$ est $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, soit $y - 1 = 0 \times x \iff y = 1$.
4. La droite d'équation $y = x$ coupe la courbe en un seul point d'abscisse légèrement supérieure à 1.
5. La fonction g est définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ puisque la fonction f est strictement positive sur cet intervalle ; en particulier $g(0) = \ln f(0) = \ln 1 = 0$.
6. La fonction ln étant strictement croissante, la fonction g a les mêmes variations que la fonction f 'décroissante sur $]-3\ ;\ 0[$, puis croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $\dfrac{2\,449 - 2\,229}{2\,229} \times 100 = \dfrac{220}{2\,229} \times 100 \approx 9,87$ soit environ 10 %.
2.



3. La calculatrice donne $y = 54,9x + 2\,229,6$.

4. 60 ans correspond au rang $x = 6$, d'où $y = 54,9 \times 6 + 2229,6 = 2559$.
5. Baisser le rachat de 3 % chaque année revient à multiplier ce montant par $0,97$, donc au bout de 5 ans le montant du rachat sera de :
$2555 \times 0,97^5 \approx 2194,07$ soit à l'euro près 2 194 €.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : étude théorique

1. D'une année à la suivante le nombre d'habitants est multiplié par 1,05 puis augmenté de 4 000.
Donc $u_1 = u_0 \times 1,05 + 4000 = 100000 \times 1,05 + 4000 = 109000$.
$u_2 = u_1 \times 1,05 + 4000 = 109000 \times 1,05 + 4000 = 118450$.
2. On a déjà vu que pour tout naturel n, $u_{n+1} = 1,05u_n + 4000$.
3. **a.** $v_0 = u_0 + 80000 = 100000 + 80000 = 180000$.
b. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} + 80000 = 1,05u_n + 4000 + 80000 = 1,05u_n + 84000 = 1,05\left(u_n + \frac{84000}{1,05}\right) = 1,05(u_n + 80000) = 1,05v_n$.
L'égalité vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 1,05v_n$ montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 180000$ et de raison 1,05.
c. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times r^n = 180000 \times 1,05^n$.
Or $v_n = u_n + 80000 \iff u_n = v_n - 80000$, soit :
quel que soit le naturel n, $u_n = 180000 \times 1,05^n - 80000$.
d. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,05^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ce qui semble irréaliste.

Partie B

1. 2020 correspond au rang $n = 15$, d'où $u_n = 180000 \times 1,05^{15} - 80000 \approx 294207$.
2. Il faut résoudre l'inéquation dans $\mathbb{N}$, :
$180000 \times 1,05^n - 80000 > 200000 \iff 180000 \times 1,05^n > 280000 \iff 1,05^n > \frac{28}{18} \iff$
$1,05^n > \frac{14}{9} \iff n\ln 1,05 > \ln\frac{14}{9}$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff$
$n > \frac{\ln\frac{14}{9}}{\ln 1,05}$. Or $\frac{\ln\frac{14}{9}}{\ln 1,05} \approx 9,05$.
Il faut attendre la 10e année soit en 2015.

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

$$f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,5x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x} = 0$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 10\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$, finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** $f(\alpha) = \alpha - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5\alpha} = 2\ln 5 - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5\times 2\ln 5} = 2\ln 5 - 2 + 10\mathrm{e}^{-\ln 5} = 2\ln 5 - 2 + \frac{10}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = 2\ln 5 - 2 + \frac{10}{5} = 2\ln 5 - 2 + 2 = 2\ln 5 = \alpha$.
b. $\alpha = 2\ln 5 \approx 3,219$ soit $\alpha \approx 3,2$ au dixième près.
3. **a.** On a $f'(x) = 1 + 10 \times (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x} = 1 - 5\mathrm{e}^{-0,5x}$

b. • $f'(x) > 0 \iff 1 - 5\mathrm{e}^{-0,5x} > 0 \iff 1 > 5\mathrm{e}^{-0,5x} \iff \mathrm{e}^{0,5x} > 5 \iff 0,5x > \ln 5 \iff$ $x > 2\ln 5 \iff x > \alpha$. Donc sur $]2\ln 5\,;\,+\infty[$, la fonction f est croissante de $f(\alpha) = \alpha$ à $+\infty$;

• $f'(x) < 0 \iff 1 - 5\mathrm{e}^{-0,5x} < 0 \iff 1 < 5\mathrm{e}^{-0,5x} \iff \mathrm{e}^{0,5x} < 5 \iff$ $0,5x < \ln 5 \iff x < 2\ln 5 \iff x < \alpha$. Donc sur $]0\,;\,2\ln 5[$, la fonction f est décroissante de $f(0) = 8$ à $f(\alpha) = \alpha$;

• $f'(x) < 0 \iff x = 2\ln 5$: $f(2\ln 5) = f(\alpha) = \alpha$ est le minimum de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. On a $f(x) - (x-2) = 10\mathrm{e}^{-0,5x}$ et on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} 10\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$.

De plus on sait que quel que soit x, $10\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$, donc $f(x) - (x-2) > 0$.

Graphiquement les deux résultats précédents montrent que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini et que la courbe est au dessus de son asymptote.

5. Voir la figure

a. Puisque $f(\alpha) = \alpha$, le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse α appartient à la droite $y = x$ simple à tracer.

b. La tangente au point précédent est horizontale.

c. La droite (D) contient par exemple les points de coordonnées $(2\,;\,0)$ et $(8\,;\,6)$.

6. a. Voir la figure.

b. La fonction f étant positive sur $[2\,;\,6]$, l'aire, en unité d'aire de la surface E est égale à l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_2^6 [f(x) - (x-2)\,\mathrm{d}x$.

Or une primitive de la fonction $x \longmapsto 10\mathrm{e}^{-0,5x}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{10}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5x} = -20\mathrm{e}^{-0,5x}$.

On a donc :

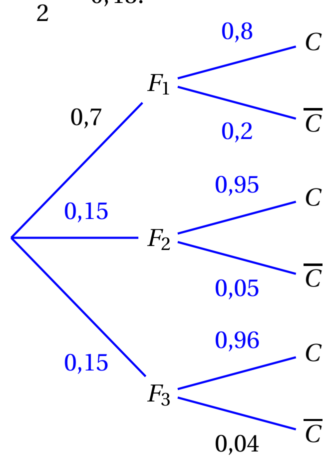
$\mathscr{A} = \left[-20\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^6 = -20\mathrm{e}^{-0,5\times 6} - \left(-20\mathrm{e}^{-0,5\times 2}\right) = -20\mathrm{e}^{-3} + 20\mathrm{e}^{-1} = 20\mathrm{e}^{-1} - 20\mathrm{e}^{-3} \approx 6,361$ soit environ 6,36 unités d'aire au centième près. (ce que l'on peut vérifier approximativement sur la figure)

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $p(F_2) = p(F_3) = \dfrac{1 - p(F_1)}{2} = \dfrac{0,3}{2} = 0,15$.

2.



3. Il faut trouver $p(C \cap F_3)$;

$p(C \cap F_3) = p(F_3 \cap C) = p(F_3) \times p_{F_3}(C) = 0,15 \times 0,96 = 0,144$.

4. D'après la loi des probabilités totales :
$p(C) = p(F_1 \cap C) + p(F_2 \cap C) + p(F_3 \cap C) =$
$0,7 \times 0,8 + 0,15 \times 0,95 + 0,15 \times 0,96 = 0,56 + 0,1425 + 0,144 = 0,8465$.

5. Il faut calculer $p_{\overline{C}}(F_1) = \dfrac{p\left(\overline{C} \cap F_1\right)}{p\left(\overline{C}\right)}$.
   - On a $p\left(\overline{C} \cap F_1\right) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$;
   - D'après la loi des probabilités totales :

   $p\left(\overline{C}\right) = p\left(\overline{C} \cap F_1\right) + p\left(\overline{C} \cap F_2\right) + p\left(\overline{C} \cap F_3\right) =$
   $0,7 \times 0,2 + 0,15 \times 0,05 + 0,15 \times 0,04 = 0,1535$. On pouvait calculer directement $p\left(\overline{C}\right) = 1 - p(C) = 1 - 0,8465 = 0,1535$.
   Donc $p_{\overline{C}}(F_1) = \dfrac{0,14}{0,1535} \approx 0,912$.
   Il y a donc plus de 90 chances sur 100 qu'une pomme hors calibre provienne du fournisseur 1. Le contrôleur a raison.

ANNEXE 2
Exercice 2
À rendre avec la copie

Courbe représentative $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}.$$