Corrigé du baccalauréat ES Polynésie 9 juin 2005

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

$$f(x) = -\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)} + 30.$$

1. On obtient avec la calculatrice, valeurs arrondies à 10^{-6} :

x_i	0	1	2	3	4
y_i	$-25{,}000$	$-3{,}111$	9,892	17,788	22,598
$\left[f\left(x_i\right) - y_i\right]^2$	0,121 483	0,000 020	0,000 505	0,000 871	0,000 168

La somme des carrés des écarts est égale approximativement à :

$0{,}165\,321 < 0{,}5$. L'approximation par la fonction f est satisfaisante.

2. **a.** On a $\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)\times \mathrm{e}^4}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 30$.

b. Le résultat précédent montre que géométriquement la droite D d'équation $y = 30$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

c. On a $f(x) - 30 = -\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)}$; or ce nombre est inférieur à zéro quel que soit le réel x : ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de l'asymptote D.

3. **a.** La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = -\left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)}\right] = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)}$; ce nombre est positif quel que soit le réel x. La fonction est donc croissante de $f(0) = -\mathrm{e}^{(4)} + 30 \approx -24{,}6$ à 30.

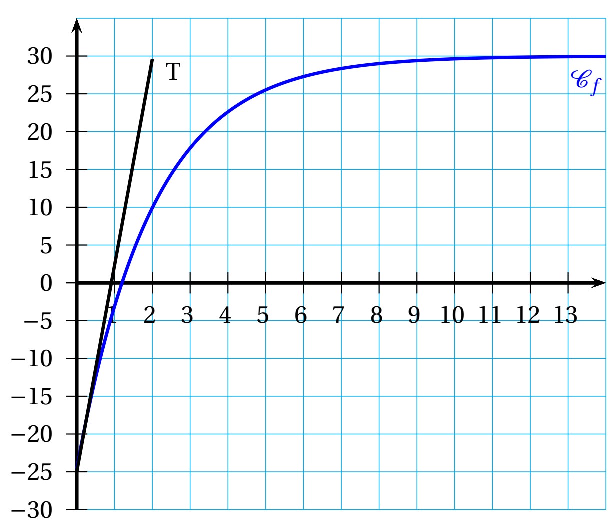
b. Le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est égal au nombre dérivé $f'(0) = -\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\left(-\frac{0}{2}+4\right)}\right] = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4 \approx 27{,}3$.

4. **a.** On a $f(x) \geqslant 29{,}8 \iff -\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)} + 30 \geqslant 29{,}8 \iff \mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)} \leqslant 0{,}2 \iff -\frac{x}{2} + 4 \leqslant \ln 0{,}2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff \frac{x}{2} \geqslant 4 - \ln 0{,}2 \iff x \geqslant 2(4 - \ln 0{,}2)$.

Or $2(4 - \ln 0{,}2) \approx 11{,}2$. Le bénéfice évalué au 1er janvier dépassera 29 800 euros à partir de la douzième année soit le 1er janvier 2011.

b. 30 est la limite de f au voisinage de plus l'infini. On sait que cette limite ne sera jamais atteinte.

5.



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Il y a 10 % de jetons bleus, donc 30 % de jetons blancs et il reste 60 % de jetons rouges.
Si le jeton tiré est rouge le gain est de 2 euros, s'il est blanc le gain est de 4 euros et s'il est bleu la perte est 8 euros. On a donc le tableau de la loi de probabilité suivant :

	rouge	blanc	bleu
probabilité	0,6	0,3	0,1
gain	2	4	−8

b. Le gain moyen est égal à l'espérance mathématique de la variable aléatoire « gain », soit :
$E = 0,6\times 2+0,3\times 4+0,1\times(-8) = 1,2+1,2-0,8 = 1,6$.
En moyenne on gagnera 1,60 € par partie jouée.

2. **a.** Le tableau de la loi de probabilité est alors :

	rouge	blanc	bleu
probabilité	0,6	0,3	0,1
gain	g_0	g_0^2	$-g_0^3$

Le gain moyen est donc :
$0,6g_0+0,3g_0^2-0,1g_0^3$: c'est la ou les valeurs maximales de la fonction f définie par :

$$f(x) = -0,1x^3+0,3x^2+0,6x.$$

b. $f'(x) = -0,3x^2+0,6x+0,6$.

c. $f'(x) = 0,3(-x^2+2x+0,2)$.
Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme : $-x^2+2x+2$.
$\Delta = 4+8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$.
Ce trinôme s'annule donc en $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$ et $x_2 = 1+\sqrt{3}$.
le trinôme est négatif sauf sur $\left]1-\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{3}\right[$.
Les extremums sont obtenus pour les valeurs de la variable qui annulent la dérivée, soit :
$f\left(1-\sqrt{3}\right) = -0,1\left(1-\sqrt{3}\right)^3+0,3\left(1-\sqrt{3}\right)^2+0,6\left(1-\sqrt{3}\right)\approx -0,24$ (minimum) et
$f\left(1+\sqrt{3}\right) = -0,1\left(1+\sqrt{3}\right)^3+0,3\left(1+\sqrt{3}\right)^2+0,6\left(1+\sqrt{3}\right)\approx 1,839$ (maximum) soit environ 1,84 €.

d. Pour $x = 1+\sqrt{3}\approx 2,73$ valeur du gain de base, le gain moyen espéré pour chaque partie sur un grand nombre de parties est environ 1,84 euro.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** C'est l'ensemble des points du plan de cote 2, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan (EFGH).

b. On a A(1 ; 0 ;0), B(1 ; 1 ; 0) et F(1 ; 1 ; 2).
Si $M(x\,;\,y\,;\,z)\in$ (ABF) $\iff ax+by+cz = d$ est une équation du plan on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& d\\ a+b &=& d\\ a+b+2c &=& d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& d\\ b &=& 0\\ a+b+2c &=& d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& d\\ b &=& 0\\ d+2c &=& d\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & d\\ b & = & 0\\ c & = & 0\end{array}\right.$$

Une équation est donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(ABF)} \iff ax = a \iff x = 1$.

c. La droite (EF) appartient au plan (EFGH) et au plan (ABF), ses coordonnées vérifient donc les équations des deux plans :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(EF)} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1\\ z & = & 2\end{array}\right.$

2. a. G$(-1\,;\,1\,;\,2)$; P est le milieu de [EF], donc P$\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,2\right)$

b. Voir à la fin.

c. Si $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(APQ)} \iff ax + by + cz = d$ est une équation du plan on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & d\\ a+\frac{1}{2}b+2c & = & d\\ \frac{1}{2}b & = & d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & d\\ 2a+b+4c & = & 2d\\ b & = & 2d\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & d\\ 2d+2d+4c & = & 2d\\ b & = & 2d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & d\\ 4c & = & -2d\\ b & = & 2d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & d\\ c & = & -\frac{1}{2}d\\ b & = & 2d\end{array}\right.$$

Une équation du plan (APQ) est donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(APQ)} \iff dx + 2dy + -\frac{1}{2}dz = d \iff x + 2y - \frac{1}{2}z = 1.$

3. a. Voir la figure à la fin.

b. $G(-1\,;\,1\,;\,2) \in \text{(APQ)} \iff -1 + 2 - \frac{1}{2} \times 2 = 1 \iff 1 - 1 = 1$. La dernière égalité est fausse donc G n'appartient pas au plan (APQ).

4. « Malgré les apparences, les droites (AG) et (PQ) ne sont pas sécantes car non-coplanaires. »

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. • $p(A) = 0,7$ et $p(B) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,2$.

C'est la seule possible car on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$
$0,7 + 0,5 - 0,2 = 1$

2. • $p(A \cap B) = 0,06$.

En effet les évènements étant indépendants on sait que
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$.

3. • Cette affirmation est fausse.

Les évènement sont incompatibles donc $p(A \cap B) = 0$, la caractérisation de deux évènements indépendants $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ne peut être vraie que si $p(A) = 0$ et $p(B) = 0$.

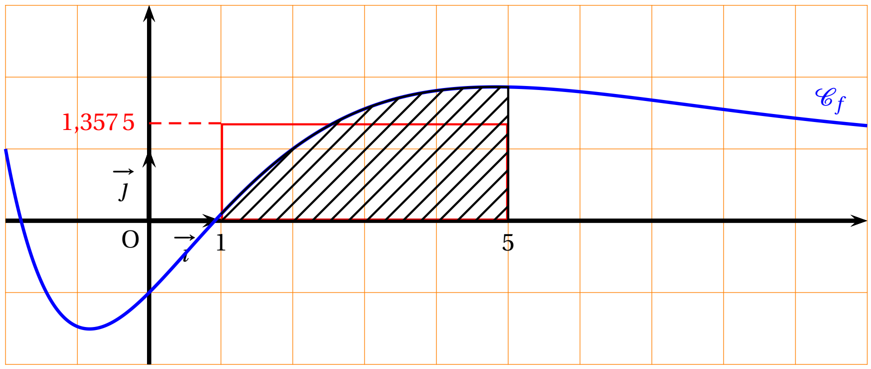
4. • environ 0,821.

On a quatre épreuves de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,35$.

La probabilité d'avoir 0 succès est égale à $(1 - 0,35)^4 = 0,65^4$, donc la probabilité d'avoir au moins un succès est égale à $1 - 0,65^4 \approx 0,821\,49$, soit au millième près 0,821.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. **a.** On lit sur le graphe de f que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[-2\,;\,-0,75]$ et sur l'intervalle [å4,83 ; 10].

   b. A(5 ; 5,43) ; une équation de la tangente en A à $\mathscr{C}_F$ est donc :
   $y - 5,43 = f(5)(x-5) \iff y - 5,43 = 1,85(x-5) \iff$
   $y = 5,43 + 1,85x - 9,25 \iff$
   $y = 1,85x - 3,82.$

   c. Le sens de variation de F est donné par le signe de sa dérivée $f(x)$.
   - F est donc croissante sur $[-2\,;\,-1,75]$ et sur $[1\,;\,10]$;
   - F est décroissante sur $[-1,75\,;\,1]$.

2. **a.** $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)-_1^5 = F(5) - F(1)$. Or on sait que $F(5) = 5,43$ et que $F(1) = 0$, donc :
   $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 5,43.$

   b. La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est le nombre défini par
   $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
   Dans le cas où la fonction est positive, l'intégrale est positive et égale à l'aire de la surface limitée par son graphe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
   Cette aire est alors égale à celle du rectangle dont les côtés mesurent $b - a$ et μ.

   c. Ici $\mu = \dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}[F(t)]_1^5 = \dfrac{1}{4}[F(5) - F(1)] = \dfrac{1}{4} \times 5,43 = 1,357\,5.$
   Sur la figure ci-dessus l'aire du rectangle rouge est égale à l'aire de la surface hachurée.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2 (spécialité)