∽ Corrigé du baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 2005 ∾

Exercice 1 **5 points**

1. **a.**
- $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ est l'ordonnée de J : $-\frac{3}{2}$;
- $f(-1)$ est l'ordonnée de K : 0 ;
- $f(1)$ est l'ordonnée de A : e ;
- $f(2)$ est l'ordonnée de B : 2 ;
- la limite de f au voisinage de plus l'infini semble être égale à 1.

b.
- $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A : elle est horizontale, donc $f'(1) = 0$;
- $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point B ; celui-ci est égal à $\dfrac{0-2}{4-2} = -1$.

2. **a.** g est définie lorsque $f(x) > 0$, soit si $x > -1$. $\text{I} = -]-1\ ;\ +\infty[$.
- On a $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à Γ.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote à Γ au voisinage de plus l'infini.

b. Sur $]-1\ ;\ +\infty[$, g est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, donc :
- sur $]-1\ ;\ 1[$, $f(x) > 0$ et $f'(x) > 0$, donc $g'(x) > 0$: la fonction g est croissante sur $]-1\ ;\ 1[$ de $-\infty$ à $\ln \text{e} = 1$;

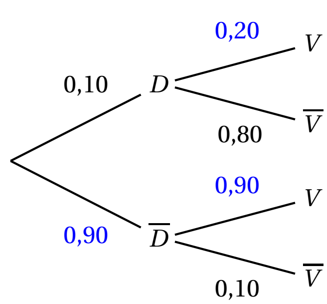
sur $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) < 0$ et $f(x) > 0$, donc $g'(x) < 0$: la fonction g est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ de 1 à 0.

c. $g(2) = \ln[f(2)] = \ln 2$;

$g'(2) = \dfrac{f'(2)}{f(2)} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 **5 points**

1.



2. **a.**
- On a $P(V \cap D) = P(D \cap V) = P(D) \times P_D(V) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$.
- $P\left(V \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D} \cap V\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(V) = 0,9 \times 0,9 = 0,81$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(V) = P(V \cap D) + P\left(V \cap \overline{D}\right) = 0,02 + 0,81 = 0,83$.

b. Il faut trouver $P_V(D) = \dfrac{P(V \cap D)}{P(V)} = \dfrac{0,02}{0,83} \approx 0,024$.

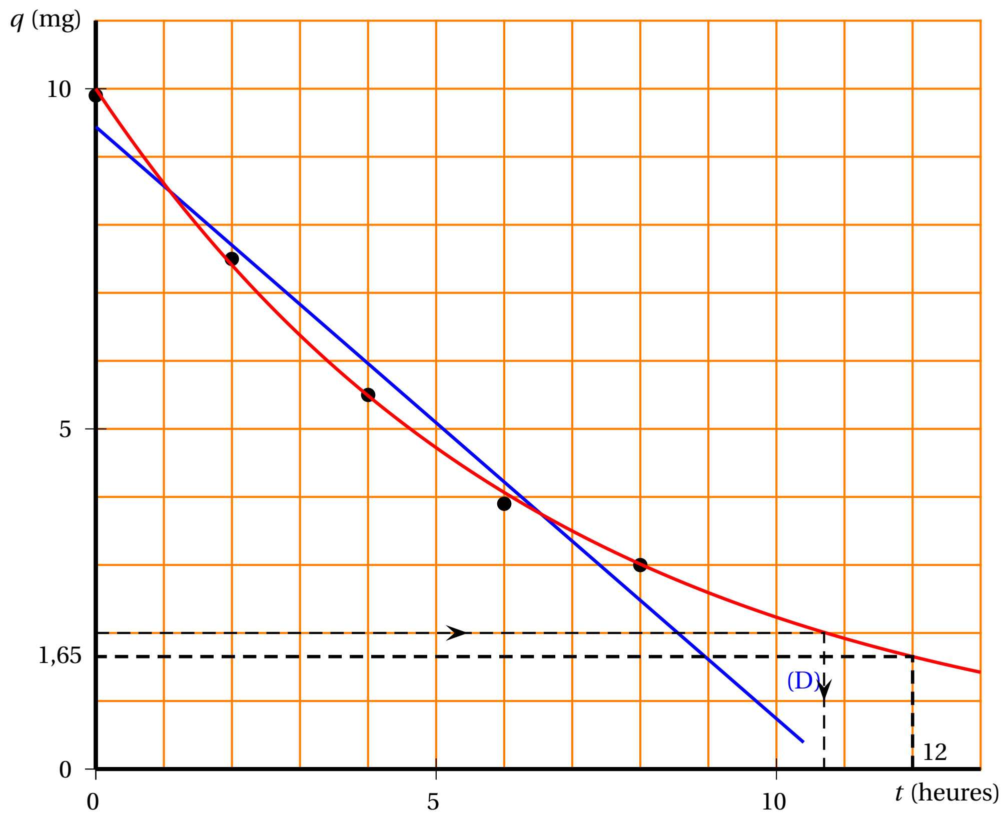


FIGURE 1 –

c. On vient de trouver $P_V(D) = \dfrac{0,02}{0,83} \approx 0,024$;
$0,24 \times P(D) = 0,24 \times 0,10 = 0,024$.
Donc effectivement $P_V(D) \approx 0,24 \times P(D)$.
Le test permet de diviser la probabilité d'acheter un appareil défectueux par 4.

3. **a.** On a vu que $p(V) = 0,83$, donc $q_1 = 0,83q_0$.

b. On a donc une diminution de 17 %.

c. On a donc $q_0 \times p_0 = q_1 \times p_1 \iff p_1 = \dfrac{q_0 \times p_0}{q_1} = \dfrac{q_0 \times p_0}{0,83q_0} = \dfrac{q_0}{0,83}$.

L'augmentation en pourcentage est donc $\dfrac{\frac{q_0}{0,83} - q_0}{q_0} \times 100 = \dfrac{1 - 0,83}{0,83} \times 100 \approx 20\,\%$.

EXERCICE 3 **10 points**

PARTIE A

Modélisation par une fonction affine

1. La calculatrice donne comme équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés $q = -0,87t + 9,44$.
2. En supposant le modèle valable 12 heures on obtient :
$q = -0,87 \times 12 + 9,44 = -1$. Ce résultat est irréaliste. Le modèle n'est pas pertinent au bout de 12 heures.

PARTIE B

Recherche d'un modèle mieux adapté

1. Voir ci-dessous.
   Les points semblent alignés mais dans un repère semi-logarithmique les droites sont les représentations graphiques de fonctions exponentielles. On peut donc envisager un ajustement par une fonction exponentielle.
2.

t_i (heures)	0	2	4	6	8
y_i (mg)	2,29	2,01	1,7	1,36	1,1

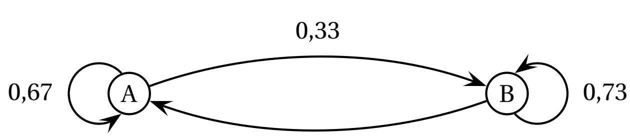
3. La calculatrice donne $y = -0,15t + 2,30$ (coefficients arrondis au centième).
4. On a donc :
   $y = -0,15t + 2,30 = \ln q \iff q = \mathrm{e}^{-0,15t+2,30}$ ou encore $q = \mathrm{e}^{-0,15t} \times \mathrm{e}^{2,30}$.
   Or $\mathrm{e}^{2,30} \approx 9,97 \approx 10$ (à l'unité près).
   Finalement : $q = 10\mathrm{e}^{-0,15t}$.
5.
$$f(t) = 10\mathrm{e}^{-0,15t}.$$
   La fonction est dérivable sur $[0\,;\,15]$ et sur cette intervalle : $q' = -0,15 \times 10\mathrm{e}^{-0,15t} = -1,5\mathrm{e}^{-0,15t}$.
   Comme $\mathrm{e}^{-0,15t} > 0$ quel que soit le réel t, on a donc $q' < 0$, donc la fonction q est décroissante sur $[0\,;\,15]$ de $q(0) = 10$ à $q(15) = 10\mathrm{e}^{-0,15\times 15} = 10\mathrm{e}^{-2,25} \approx 1,05$.
   La représentation est en rouge.
6. Avec ce modèle on obtient au bout de 12 heures une quantité :
   $10\mathrm{e}^{-0,15\times 12} = 10\mathrm{e}^{-1,8} \approx 1,65$.

PARTIE C

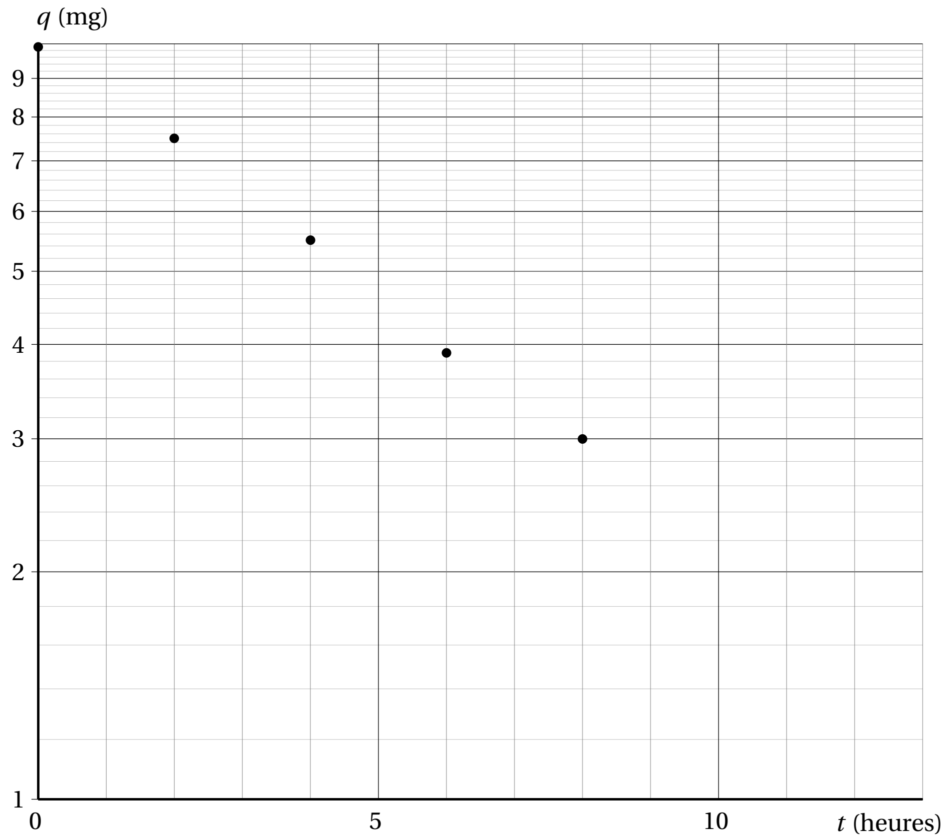
1. $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)} = \dfrac{10\mathrm{e}^{-0,15(t+1)} - 10\mathrm{e}^{-0,15t}}{10\mathrm{e}^{-0,15t}} = \dfrac{10\mathrm{e}^{-0,15t}\left(\mathrm{e}^{-0,15} - 1\right)}{10\mathrm{e}^{-0,15t}} = \mathrm{e}^{-0,15} - 1.$
   Donc $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)} = \mathrm{e}^{-0,15} - 1 \approx -0,1393$, ce qui signifie que la quantité de médicament diminue de 13,93 % par heure.
2. Voir la figure plus bas. On voit qu'il faut que $t < 10,7$.
   Conclusion : la durée d'efficacité de l'injection est de 10 heures.
3. La quantité μ moyenne de médicament présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, soit :
   $\mu = \dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} 10\mathrm{e}^{-0,15t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{10} \mathrm{e}^{-0,15t}\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{1}{-0,15}\mathrm{e}^{-0,15t}\right]_0^{10} = -\dfrac{100}{15}\left[\mathrm{e}^{-0,15\times 10} - \mathrm{e}^{-0,15\times 0}\right]$
   $= \dfrac{20}{3}\left[\mathrm{e}^{-1,5} - 1\right] \approx 5,179$ soit au dixième près 5,2 mg.

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité



1.



2. **a.** On a $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,67 & 0,33\\ 0,27 & 0,73\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,67 & 0,33\end{pmatrix}$.

En 2003 67 % des malades achètent le produit A.

b. De même $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix}0,67 & 0,33\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,67 & 0,33\\ 0,27 & 0,73\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}0,67 \times 0,67 + 0,33 \times 0,27 & 0,67 \times 0,33 + 0,33 \times 0,73\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,538 & 0{,}462\end{pmatrix}$.

En 2004, 53,8 % des malades achètent le produit A.

3. **a.** On a $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,67 & 0,33\\ 0,27 & 0,73\end{pmatrix} \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,67a_n + 0,27b_n\\ b_{n+1} & = & 0,33a_n + 0,73b_n\end{array}\right.$$

On a donc en particulier : $a_{n+1} = 0,67a_n + 0,27b_n$, mais comme $a_n + b_n = 1 \iff b_n = 1 - a_n$, on en déduit que : $a_{n+1} = 0,67a_n + 0,27(1 - a_n) = 0,67a_n + 0,27 - 0,27a_n = 0,4a_n + 0,27$.

On a donc la relation de récurrence : $a_{n+1} = 0,4a_n + 0,27$.

b. Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,45 = 0,4a_n + 0,27 - 0,45 = 0,4a_n - 0,18 = 0,4\left(a_n - \dfrac{0,18}{0,4}\right) = 0,4(a_n - 0,45) = 0,4u_n$.

La relation $u_{n+1} = 0,4u_n$ vraie pour tout naturel n montre que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,4$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 0,45 = 1 - 0,45 = 0,55$.

c. On sait que pour tout naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 0,55 \times 0,4^n$.

Or $u_n = a_n - 0,45 \iff a_n = u_n + 0,45 = 0,55 \times 0,4^n + 0,45$.

Quel que soit le naturel n, $a_n = 0,45 + 0,55 \times 0,4^n$ et par conséquent :

$b_n = 1 - a_n = 1 - (0,45 + 0,55 \times 0,4^n) = 0,55 - 0,55 \times 0,4^n = 0,55\,(1 - 0,4^n)$.

4. **a.** Comme $0 < 0,4 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,4^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,55\times 0,4^n = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,45$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1 - 0,45 = 0,55$.

À terme 45 % des malades achèteront le produit A et 55 % le produit B.

b. On a donc $P = \begin{pmatrix}0,45 & 0,55\end{pmatrix}$.

$P \times M = \begin{pmatrix}0,45 & 0,55\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,67 & 0,33\\0,27 & 0,73\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}0,45 \times 0,67 + 0,55 \times 0,27 & 0,45 \times 0,33 + 0,55 \times 0,73\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,45 & 0,55\end{pmatrix} = P$.

P est donc l'état stable et il est normal qu'il existe puisque la matrice de transition est non nulle. Cet état ne dépend pas de l'état initial P_0 (cours).