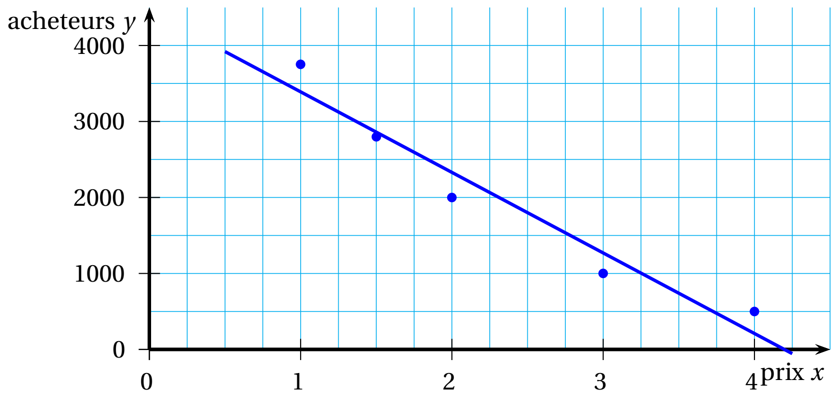
Corrigé du baccalauréat ES Métropole–La Réunion septembre 2005

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. a. La calculatrice donne comme équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés $y = -1,06x + 4,45$.

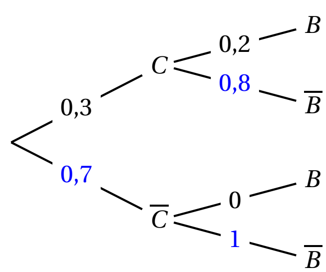
b. Voir ci-dessus.

c. Avec cet ajustement $x = 2,5$ donne $y = 4,45 - 1,06 \times 2,5 = 1,8$, soit 1 800 acheteurs.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. a. $P_1 = P(C) \times P_C(B) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$.

b. $P_2 = P(C) \times P_C\left(\overline{B}\right) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

3.

gain	$-0,50$	0	$g - 0,50$
probabilité	0,7	0,24	0,06

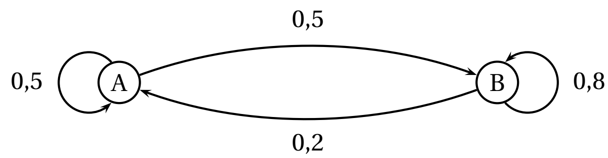
4. a. L'espérance mathématique du gain est égal à :
$E = 0,7 \times (-0,50) + 0,24 \times 0 + 0,06(g - 0,5) = -0,35 + 0,06g - 0,03 = 0,06g - 0,38$.

b. Il y aura un bénéfice pour les organisateurs si l'espérance de gain est négative, soit :
$0,06g - 0,38 < 0 \iff 0,06g < 0,38 \iff g < \dfrac{0,38}{0,06}$. Or $\dfrac{0,38}{0,06} \approx 6,333$.
Il faut donc que le gain soit inférieur à 6,34 €.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a.



b. La matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets : $M\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

2. On a $P_1 = P_0 \times M = (1\ \ 0)\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,2 & 0,8\end{pmatrix} = (0,5\ \ 0,5)$.

3. a. $P_0M^5 = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}287\,45 & 0{,}712\,55\\0{,}285\,02 & 0{,}714\,98\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}287\,45 & 0{,}712\,55\end{pmatrix}$.

Donc la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi est égale à 0,287 45.

b. Si elle ne convainc pas le premier client l'état probabiliste initial est $P_0 = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$, d'où

$P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}287\,45 & 0{,}712\,55\\0{,}285\,02 & 0{,}714\,98\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}285\,02 & 0{,}714\,98\end{pmatrix}$.

La probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier est égale à 0,285 02.

4. La matrice M étant non nulle, l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$ tel que :

$P = P \times M \iff \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,2 & 0,8\end{pmatrix} \iff$

$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5x+0,2y & 0,5x+0,8y\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0,5x+0,2y\\ y & = & 0,5x+0,8y\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,5x & = & 0,2y\\ x+y & = & 1\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,5x & = & 0,2(1-x)\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,7x & = & 0,2\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{2}{7}\\ y & = & \frac{5}{7}\end{array}\right.$

Donc $P = \begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix}$.

Qu'elle ait convaincu ou non son premier client, la probabilité de convaincre son n-ième client tendra vers $\frac{2}{7}$.

EXERCICE 3 **8 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. a. On a $h(x) = f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{-0,7x+2,1} - (0,5x+0,7) = \mathrm{e}^{-0,7x+2,1} - 0,5x - 0,7)$. D'où : $h'(x) = -0,7\mathrm{e}^{-0,7x+2,1} - 0,5$.

b. On peut écrire : $h'(x) = -\left[0,7\mathrm{e}^{-0,7x+2,1} + 0,5\right]$. Or on sait que quel que soit le réel x $\mathrm{e}^{-0,7x+2,1} > 0$, donc $h'(x) < 0$; la fonction h est décroissante sur [0 ; 5].

c. La fonction h est décroissante de $h(0) = \mathrm{e}^{2,1} - 0,7 \approx 7,47$ à $h(5) = \mathrm{e}^{-0,7\times5+2,1} - 0,5\times5 - 0,7 = \mathrm{e}^{-1,4} - 3,2 \approx -2,95$.

D'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]2\ ;\ 5[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne $\alpha \approx 2,172$ au millième près.

d. Si F a pour abscisse a, ce nombre est tel que $f(a) = g(a) \iff f(a) - g(a) = 0 \iff h(a) = 0$. Donc $a = \alpha \approx 2,17$.

2. a. L'aire du rectangle OCFE exprimée en unités d'aire est égale à $2,17 \times 1,79 = 3,8843$ soit 3,88 au centième près.

b. Sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$, la fonction f est positive donc $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire de la partie du plan limitée parla courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

c. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-0,7x+2,1}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{-0,7}\mathrm{e}^{-0,7x+2,1}$, donc :

$\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-0,7}\mathrm{e}^{-0,7x+2,1}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{-0,7}\mathrm{e}^{-0,7\alpha+2,1} - \left(\frac{1}{-0,7}\mathrm{e}^{2,1}\right)\frac{\mathrm{e}^{2,1} - \mathrm{e}^{-0,7\alpha+2,1}}{7} \approx 9,116$, soit 9,12 au centième près. (résultat vérifiable sur la figure)

PARTIE B

1. D'après la partie A $p_0 = 1,79$ et $q_0 = 2,17$.

2. a. — Voir la figure.
— La surface est colorée en gris.

b. D'après les résultats de la partie A le surplus des consommateurs est égal à $9,116 - 3,884 = 5,232$ soit environ 5 232 euros.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Le point d'abscisse 1 a pour ordonnée 0. La dérivée de la fonction est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
Une équation de la tangente en ce point est $y - 0 = \frac{1}{1}(x-1) \iff y = x - 1$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc l'axe des abscisses est asymptote à la représentation graphique de la fonction exponentielle au voisinage de moins l'infini.

3. On a pour $x > -2$:
$f'(x) = -2 \times \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{2}{2x+4} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{x+2}$.

4. Une primitive de la fonction $x \longmapsto x^3$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^4}{4}$, donc

$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$

5. Puisque $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{x^3\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{\left(x\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right)^3} = \dfrac{x^3\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x}\right)^3} =$
$\dfrac{\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^3}$. Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc
$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{-2}{2^3} = -\frac{1}{4}$.

6. La médiane est c.

7. La droite des moindres carrés associée à une série statistique à deux variables passe par le point moyen du nuage : c'est vrai.

8. On a $(1+t)^6 = 1,089 \iff 1 + t = 1,089^{\frac{1}{6}} \iff t = 1,089^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,01431$ soit environ 1,43 %.

ANNEXE

Exercice 3

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Figure à compléter