Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2005

EXERCICE 1

$$f(x) = 3x - 2 - 2x\ln x.$$

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle ;
   $f'(x) = 3 - 2\ln x - 2x \times \dfrac{1}{x} = 3 - 2\ln x - 2 = 1 - 2\ln x$.
   - $1 - 2\ln x > 0 \iff 1 > 2\ln < \iff \dfrac{1}{2} > \ln x \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > x$ (par croissance de la fonction exponentielle).

   Donc sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[= \left]0\ ;\ \sqrt{\mathrm{e}}\right[$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $]0\ ;\ \sqrt{\mathrm{e}}[$.
   - On obtient de même que f est décroissante sur $]\sqrt{\mathrm{e}}\ ;\ +\infty[$.
   - $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 0$, donc $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ est le maximum de la fonction sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 3 \times \sqrt{\mathrm{e}} - 2 - 2\sqrt{\mathrm{e}}\ln\sqrt{\mathrm{e}} = 3 \times \sqrt{\mathrm{e}} - 2 - 2\sqrt{\mathrm{e}} \times \frac{1}{2}\ln\mathrm{e} = 3\sqrt{\mathrm{e}} - 2 - \sqrt{\mathrm{e}} = 2\sqrt{\mathrm{e}} - 2$.

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ -2	↗	$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$	↘	$-\infty$

2. - Sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \sqrt{\mathrm{e}}\right[$ la fonction est croissante de - 2 à $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) > 0$; il existe donc un réel $\alpha \in \left]0\ ;\ \sqrt{\mathrm{e}}\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   On a $f(1) = 3 - 2 = 1 > 0$, donc $0 < \alpha < 1$.
   La calculatrice donne $f(0,4) \approx 0,067$ et $f(0,5) \approx 0,19$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$.
   Puis $f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,02$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.
   On a donc $\alpha \approx 0,4$ au dixième près.
   - Sur l'intervalle $\left]\sqrt{\mathrm{e}}\ ;\ +\infty\right[$ la fonction est décroissante de $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) > 0$ à moins l'infini ; il existe donc un réel $\beta \in \left]\sqrt{\mathrm{e}}\ ;\ +\infty\right[$ tel que $f(\beta) = 0$.

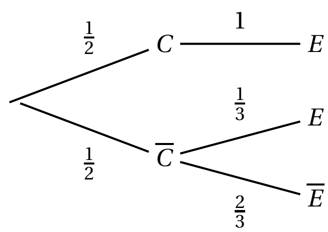
   La calculatrice donne $f(3,3) \approx 0,02$ et$f(3,4) \approx -0,12$, donc $3,3 < \beta < 3,4$, puis :
   $f(3,31) \approx 0,006$ et $f(3,32) \approx -0,008$, d'où $3,31 < \beta < 3,32$.
   On a donc $\beta \approx 3,3$ au dixième près.
3. **a.** **Fausse** car la limite de $f(x)$ quand $x \to 0$ n'est ni plus ni moins l'infini.

   b. **Vraie** : toute primitive de f sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \sqrt{\mathrm{e}}\right[$ a pour dérivée f et sur cet intervalle on a bien $f'(x) > 0$, donc F est croissante sur cet intervalle.

EXERCICE 2 **5 points**

(pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

1. **a.**

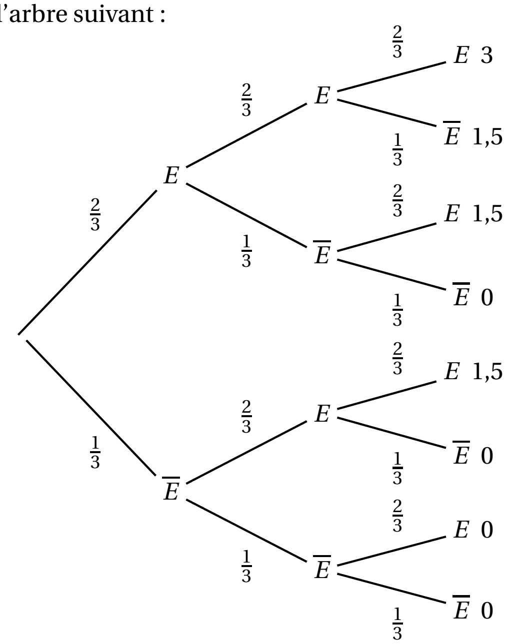


b. D'après la loi des probabilités totales :

$p(E) = p(C \cap E) + p\left(\overline{C} \cap E\right) = p(C) \times p_C(E) + p\left(\overline{C}\right) \times p_{\overline{C}}(E) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$.

c. Il faut trouver $p_E(C) = \dfrac{p(E \cap C)}{p(E)} = \dfrac{p(C \cap E)}{p(E)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$.

2. a. Pour chaque question la probabilité de répondre correctement est égale à $\dfrac{2}{3}$. Avec trois questions on a donc l'arbre suivant :



b. La probabilité que Julien ait au moins 1,5 point à ce Q. C. M. est égale à :

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \dfrac{8+4+4+4}{27} = \dfrac{20}{27}$.

c. La probabilité d'avoir 3 points est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$.

La probabilité d'avoir 1,5 point est celle d'avoir 2 bonnes réponses et une mauvaise ; il y a trois possibilités, d'où une probabilité de $3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{27}$

Il reste $1 - \dfrac{8}{27} - \dfrac{12}{27} = \dfrac{7}{27}$ probabilité d'avoir 0 point. La loi de probabilité de la variable X égale au nombre de points est donc :

Valeurs de X	0	1,5	3
$p(X)$	$\dfrac{7}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{8}{27}$

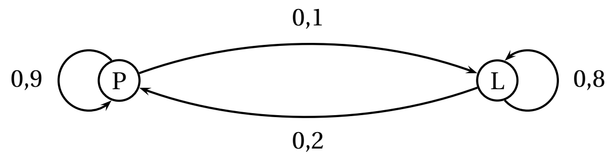
Pour un assez grand nombre d'élèves la moyenne de la classe sera voisine de l'éspérance de la variable X, soit :

$E(X) = 0 \times \dfrac{7}{27} + 1,5 \times \dfrac{12}{27} + 3 \times \dfrac{8}{27} = \dfrac{42}{27} = \dfrac{14}{9} \approx 1,56$ au centième près.

EXERCICE 2 **5 points**

(pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

1. a.



On en déduit la matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

b. On a $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$.

c. La matrice de transition M étant non nulle, on sait que l'état P_n va tendre vers un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$ telle que :

$P = P \times M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \iff$

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9x + 0,2y & 0,1x + 0,8y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,9x + 0,2y \\ y & = & 0,1x + 0,8y \end{array} \right. \iff 0,1x = 0,2y \iff$

$x = 2y$. Or $x = 1 - y$, donc $1 - y = 2y \iff 1 = 3y \iff y = \dfrac{1}{3}$ et par conséquent $x = \dfrac{2}{3}$.

D'où $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{M} \iff \begin{pmatrix} p_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \iff$

$\begin{pmatrix} p_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9p_n + 0,2l_n & 0,1p_n + 0,8l_n \end{pmatrix}$.

Donc par identification $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,2l_n$, mais comme $p_n + l_n = 1 \iff l_n = 1 - p_n$ on a par substitution :

$p_{n+1} = 0,9p_n + 0,2(1 - p_n) \iff p_{n+1} = 0,9p_n + 0,2 - 0,2p_n = 0,7p_n + 0,2$.

Donc pour tout naturel n, $\quad p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$.

3. a. On a pour tout naturel n, $\quad u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{3} = 0,7p_n + 0,2 - \dfrac{2}{3} = 0,7p_n + \dfrac{0,6}{3} - \dfrac{2}{3} =$

$0,7p_n - \dfrac{1,4}{3} = 0,7\left(p_n - \dfrac{2}{3}\right) = 0,7u_n$.

L'égalité vraie pour tout n, $u_{n+1} = 0,7u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,7$.

b. On a $u_0 = p_0 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{4}{6} = -\dfrac{1}{6}$.

On sait qu'alors quel que soit le naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = -\dfrac{1}{6}(0,7)^n$.

Or $u_n = p_n - \dfrac{2}{3} \iff p_n = u_n + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}(0,7)^n$.

c. Comme $0 < 0,7 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{6}(0,7)^n = 0$ et enfin

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{2}{3}$.

À terme 2 personnes sur 3 seront propriétaires et 1 sur 3 locataire.

EXERCICE 3 **5 points**

(commun à tous les candidats)

Partie A

1. On lit :• $f(0) = 2$;
   - $f'(0) = \dfrac{5-2}{2-1} = 3$;
   - $f(x) < 0$ sur $[-6\,;\,-1[$ et
   - $f(x) > 0$ sur $]-1\,;\,2[$.
2. **a.** La fonction ln étant croissante, les variations de g sont les mêmes que celles de f :
   - g est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$.
   - g est décroissante sur $[\alpha\,;\,2]$.
   - Comme $\lim x \to 2 f(x) = 0$, alors $\lim x \to 2 \ln[f(x)] = -\infty$. (la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction g.

   b. On sait que g est dérivable sur $[0; 2[$ et sur cet intervalle $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, d'où

   $g'(0) = \dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{3}{2}$.

Partie B

1. • On a $F'(-1) = f(-1) = 0$;
   - On a $F'(2) = f(2) = 0$.
2. **a.** On a $F'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^x + \left(ax^2+bx-1\right)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(2ax+b+ax^2+bx-1\right) = \left(ax^2+(2a+b)x+b-1\right)\mathrm{e}^x$.

   b. • $F'(-1) = 0 \iff \left(a(-1)^2+(2a+b)\times(-1)+b-1\right)\mathrm{e}^{-1} = 0 \iff a-2a-b+b-1 = 0 \iff -a-1 = 0 \iff a = -1$;
   - $F'(2) = 0 \iff \left(a(2)^2+(2a+b)\times(2)+b-1\right)\mathrm{e}^2 = 0 \iff 4a+4a+3b-1 = 0 \iff 8x+3b-1 = 0$. Or $a = -1$, donc $3b = 9 \iff b = 3$.

   Donc $F(x) = \left(-x^2+3x-1\right)\mathrm{e}^x$.

   c. $F(2)-F(-1) = \left(-2^2+3\times2-1\right)\mathrm{e}^2 - \left(-(-1)^2+3\times(-1)-1\right)\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^2+6\mathrm{e}^{-1} \approx 9{,}6$ (u. a.).

   On a $F(2)-F(-1) = [F(x)]_{-1}^{2} = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Cette différence est donc égale en unité d'aire à l'aire de la surface limitée par par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

EXERCICE 4 **5 points**
(commun à tous les candidats)

1. **a.** Voir à la fin.

   b. Tous les points sont sensiblement sur cette droite qui représente un bon ajustement.

   c.
2. **a.**

   b. La calculatrice donne $z = 0{,}037x + 5{,}291$ après arrondis au millième des coefficients.

   c. Pour $z > 0$, on a $z = \ln y \iff y = \mathrm{e}^z \iff y = \mathrm{e}^{0{,}037x+5{,}291} \iff y = \mathrm{e}^{0{,}037x}\times\mathrm{e}^{5{,}291}$.

   Or $\mathrm{e}^{5{,}291} \approx 199$, d'où $y \approx 199\mathrm{e}^{0{,}037x}$.
3. **a.** $f(x) \geqslant 2000 \iff 200\mathrm{e}^{0{,}037x} \geqslant 2000 \iff \mathrm{e}^{0{,}037x} \geqslant 10 \iff 0{,}037x \geqslant \ln(10) \iff x \geqslant \dfrac{\ln(10)}{0{,}037}$.

   Or $\dfrac{\ln(10)}{0{,}037} \approx 62{,}23$. Il faut prendre au moins 63 : les personnes de plus de 85 ans dépasseront les 2 millions à partir de 2013.

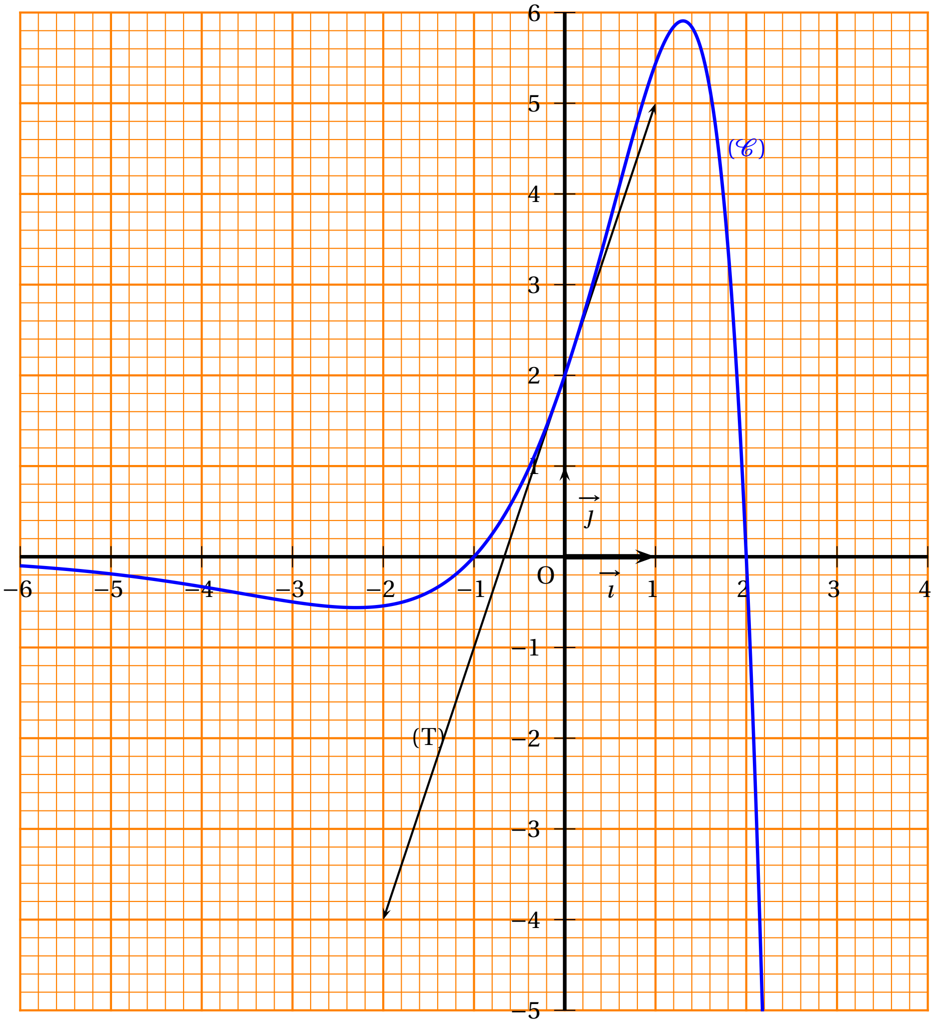
b. Une primitive de $x \longmapsto \text{e}^{0,037x}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{0,037}\text{e}^{0,037x}$, donc :

$$\frac{1}{50}\int_0^{50} f(x)\,\text{d}x = \frac{1}{50}\left[\frac{1}{0,037}\text{e}^{0,037x}\right]_0^{50} = \frac{1}{50\times 0,037}\left[\text{e}^{0,037\times 50} - \text{e}^{0,037\times 0}\right]$$

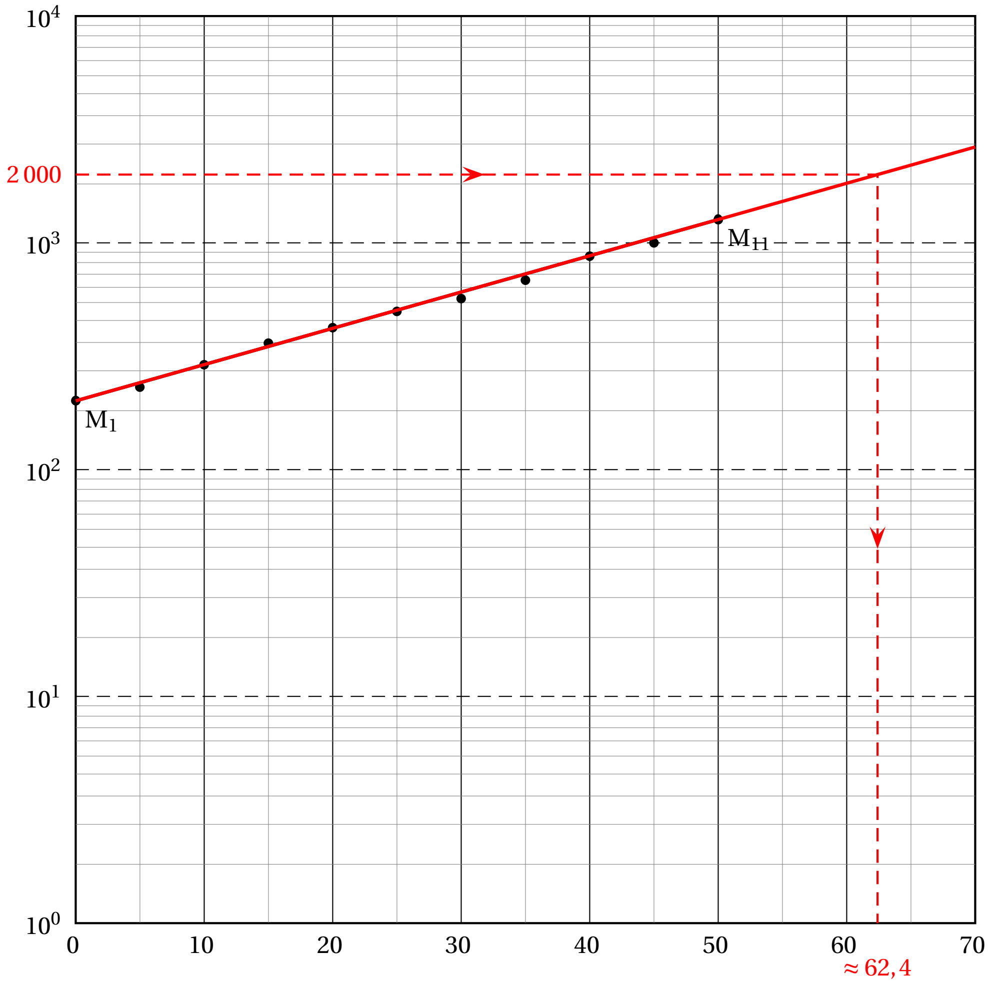
$= \dfrac{1}{50\times 0,037}\left[\text{e}^{0,185} - 1\right] \approx 579{,}439\,9$, soit environ 579,440 au millième près.

Ce nombre représente la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,50]$. C'est-à-dire qu'entre 1950 et 2000 le nombre de personnes de plus de 85 ans a été en moyenne de 579 440.

Annexe 1 – Exercice 3 (à remettre avec la copie)



Annexe 2 – Exercice 4 (à remettre avec la copie)



X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1 079	1 267
$z_i = \ln y_i$	5,303	5,442	5,670	5,889	6,047	6,211	6,340	6,528	6,773	6,984	7,144