Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2005

EXERCICE 1 **6 points**

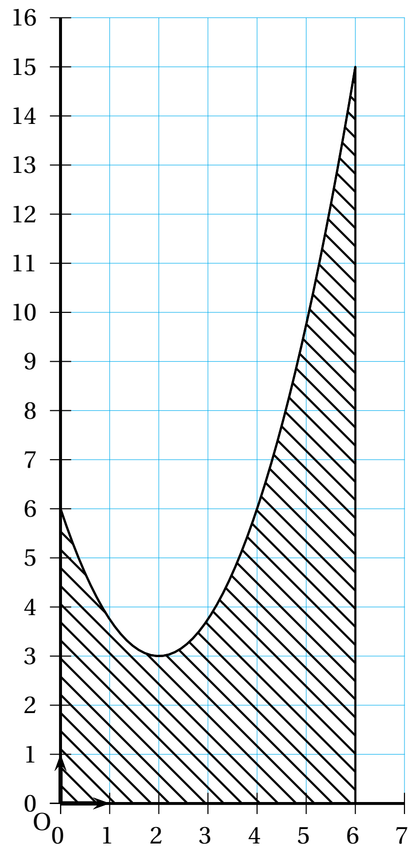
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan d'origine O.

La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d' équation $x = 6$.



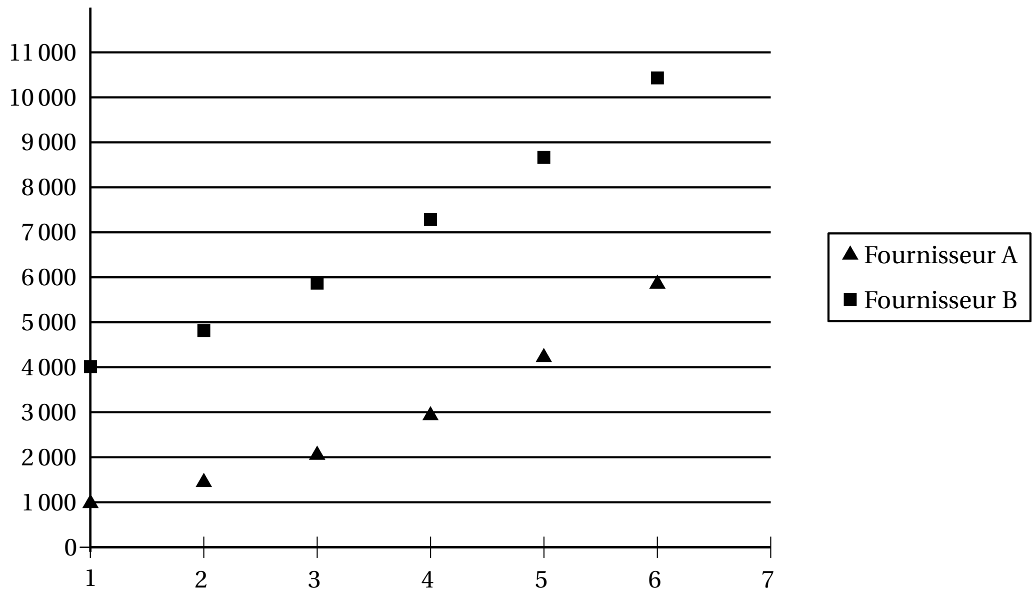
1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
2. On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0\ ;\ 6]$.
   La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K.
   On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK.
   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 6]$, $R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle OHMK soit égale à l'aire hachurée S.
   a. Montrer que le problème précédent revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par :
   $$g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36.$$
   b. Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ et dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans une ville, deux fournisseurs d'accès au réseau internet sont en concurrence.
Pour étudier l'évolution du nombre d'abonnés à ces deux fournisseurs A et B, on a reporté dans le tableau suivant, à la fin de chaque année, le nombre total d'abonnés déclaré par chacun des deux fournisseurs.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre total y_i d'abonnés par le fournisseur A	975	1 443	2 049	2 930	4 220	5 850
Nombre total t_i d'abonnés par le fournisseur B	4 012	4 813	5 872	7 281	8 664	10 432



1. Recopier les deux dernières lignes du tableau suivant en les complétant.
   On détaillera chacun des quatre calculs et on arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

	Augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage **annuel moyen** d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004
Fournisseur A	…	500 %	… %
Fournisseur B	6 420	… %	… %

2. **a.** L'allure du nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $Y_i = \ln(y_i)$.
   Écrire une équation de la droite (d) d'ajustement de Y en x par la méthode des moindres carrés.
   Les calculs seront faits avec la calculatrice (sans justification) et les résultats finaux seront arrondis au millième.

   b. En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre d'abonnés au fournisseur A en 2006.

3. L'allure du nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ t_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.

En posant $T_i = \ln(t_i)$, on obtient, par la méthode des moindre carrés, une équation de la droite (Δ) d'ajustement de T en x sous la forme :

$T = 0,193x + 8,102$ (ce résultat est admis).

En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre d'abonnés au fournisseur B en 2006.

4. En supposant que les ajustements précédents restent pertinents, préciser l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés au fournisseur A dépassera le nombre d'abonnés au fournisseur B.

Justifier.

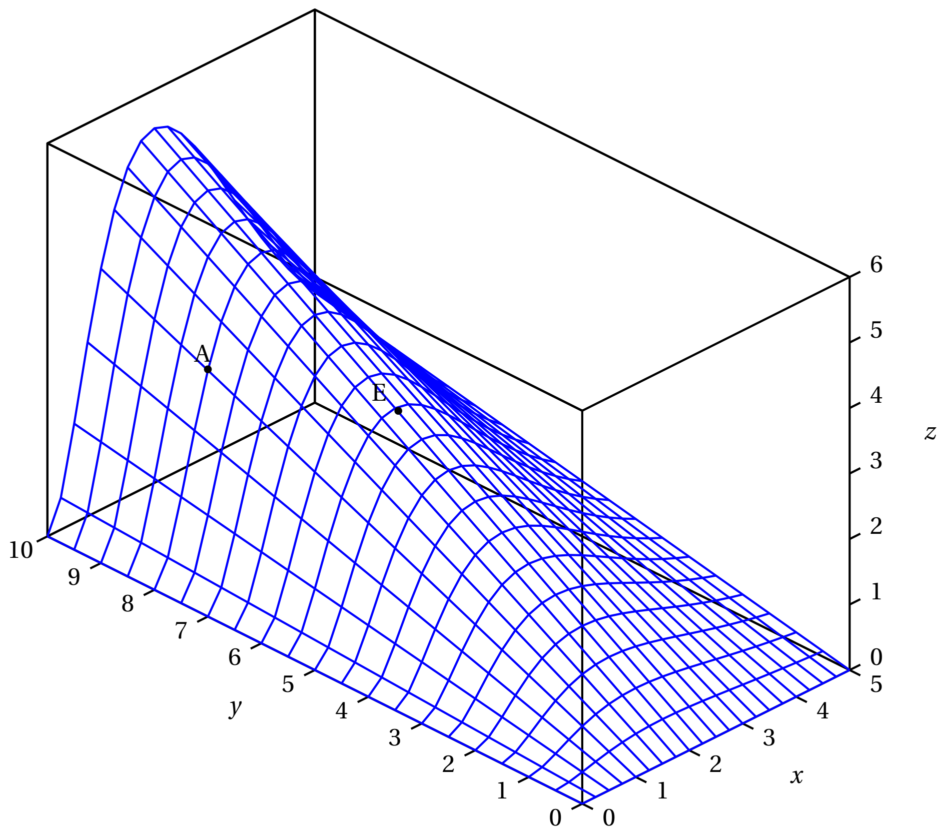
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le bénéfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production.
On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités. On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction B définie par

$$B(x\ ;\ y) = x^2 y\mathrm{e}^{-x}.$$

Voici une vue de la surface (S) d'équation $z = x^2 y\mathrm{e}^{-x}$, avec x élément de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et y élément de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, dans un repère orthogonal de l'espace.



1. Déterminer par lecture graphique le montant des investissements et la valeur de la production qui permettent d'obtenir un bénéfice maximal quand x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et y appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$. Calculer la valeur correspondante de ce bénéfice.
2. **a.** Sur la figure ci-dessus, on a placé le point A appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_A = 1$ et pour ordonnée $y_A = 8$. Calculer la troisième coordonnée z_A du point A.

   b. Sur la figure ci-dessus, on a placé le point E appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_E = 2$ et pour troisième coordonnée $z_E = z_A$. Calculer la valeur exacte y_E de l'ordonnée du point E.
3. Quelle est la nature de l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = 1$? Justifier.
   Tracer cette intersection dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, y appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$. Déterminer, à l'euro près, le montant en euros du bénéfice maximal réalisé par l'entreprise quand le montant des investissements est fixé à 1 million d'euros.
4. Déterminer une équation de la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $y = 10$. Expliquer alors comment retrouver le résultat de la question 1.

EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(2x-4).$$

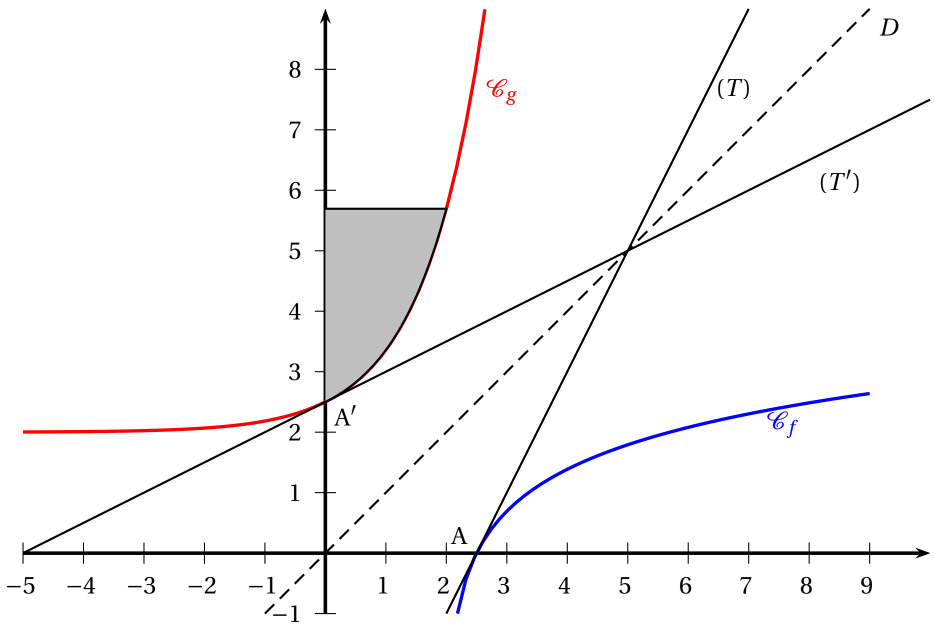
On appelle $(\mathscr{C}_f)$ la courbe tracée ci-dessous, représentative de f dans un repère orthonormal.

1. a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

b. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonnées exactes de A ?

d. Déterminer une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.



2. Sur la figure ci-dessus, on a tracé la courbe $(\mathscr{C}_f)$, le point A, la droite (T) et la droite (D) d' équation $y = x$. Par la symétrie axiale d'axe (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ se transforme en une courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative d'une fonction g définie dans $\mathbb{R}$.

On admet que, pour tout x réel, $g(x)$ s'écrit sous la forme $g(x) = a + b\mathrm{e}^x$ où a et b sont deux nombres réels.

La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ainsi construite passe par le point A' image de A par la symétrie d'axe (D). De plus, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ admet au point A' une tangente (T') qui est l'image de la droite (T) par la symétrie d'axe (D).

a. Donner, sans justification, le coefficient directeur de la droite (T').

b. Calculer a et b en justifiant soigneusement les calculs.

c. Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à $(\mathscr{C}_g)$ et ayant pour abscisse 2.

d. Quelles sont les coordonnées du point E' image de E par la symétrie d'axe (D) ?

3. a. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 \left(2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, du domaine hachuré défini par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E. On demande la valeur exacte du résultat.

c. Expliquer comment on peut en déduire, sans faire de calculs, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{2+\frac{1}{2}\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.