# Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2005

**EXERCICE 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

1. La fonction est positive sur l'intervalle $[0; 6]$, donc l'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^6 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + 6\right)\,\mathrm{d}x$.

   Une primitive de la la fonction est $x \longmapsto F(x) = \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x$, donc l'aire est égale à :

   $S = \left[\dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x\right]_0^6 = \dfrac{1}{4} \times 6^3 - \dfrac{3}{2} \times 6^2 + 6 \times 6 = 54 - 54 + 36 = 36$ unités d'aire.

2. On a $M(x\,;\,f(x))$, $H(x\,;\,0)$, $K(0\,;\,f(x))$, donc l'aire du rectangle O$HMK$ est égale à :

   $R(x) = x \times f(x) = x\left(\dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 6\right) = \dfrac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 6x = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.

3. **a.** Il faut résoudre l'équation $S(x) = R(x)$, soit :

   $36 = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x \iff 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36 = 0$.

   Il faut donc résoudre dans $[0; 6]$, l'équation $g(x) = 0$, avec

   $g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$.

   **b.** La fonction polynôme $g$ est dérivable sur $[0; 6]$ et sur cet intervalle ;

   $g'(x) = 3 \times 0,75x^2 - 6x + 6 = 2,25x^2 - 6x + 6$.

   Pour ce trinôme : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2,25 \times 6 = 36 - 54 = -18 < 0$.

   Ce trinôme n'a pas de racines et par conséquent on a pour tout $x$,

   $g'(x) > 0$ : la fonction $g$ est donc croissante de $g(0) = -36$ à

   $g(6) = 0,75 \times 6^3 - 3 \times 6^2 + 6 \times 6 - 36 = 162 - 108 = 54$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,6]$ tel que $g(\alpha) = 0$. La calculatrice donne : $f(4,5) = -1{,}40625$ et $f(4,6) = 1,122$, donc $4,5 < \alpha < 4,6$, puis :

   $f(4,55) \approx -0,16$ et $f(4,56) \approx 0,093$, donc $4,55 < \alpha < 4,56$.

   On a $\alpha \approx 4,56$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

1.

| | Augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004 | Pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004 | Pourcentage **annuel moyen** d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004 |
|---|---|---|---|
| Fournisseur A | 4 875 | 500 % | 43 % |
| Fournisseur B | 6 420 | 160 % | 21 % |

2. **a.** La calculatrice permet d'obtenir en arrondissant les coefficients au millième :

   $Y = 0,358x + 6,544$.

   **b.** En supposant cet ajustement encore valable en 2006, on obtient $Y = 0,358 \times 8 + 6,544 = 9,408 = \ln y \iff y = \mathrm{e}^{9,408} \approx 12\,185$ abonnés au fournisseur A en 2006.

**3.** Avec ce modèle, on obtient en 2006 :
$T = 0,193 \times 8 + 8,102 = 9,646 = \ln y \iff y = \mathrm{e}^{9,646} \approx 15460$ abonnés au fournisseur B en 2006.

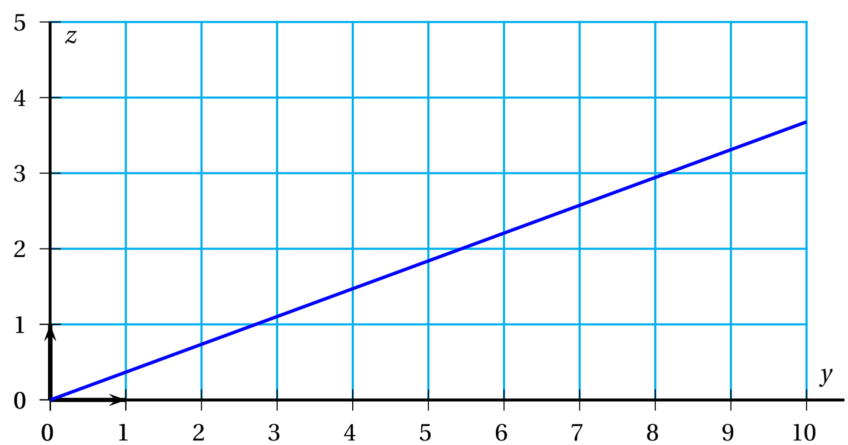
**4.** On a $Y = 0,358x + 6,544 \iff y = \mathrm{e}0,358x + 6,544$ et
$T = 0,193x + 8,102 \iff t = \mathrm{e}^{0,193x+8,102}$.
Il faut résoudre l'inéquation :$y > t \iff \mathrm{e}0,358x + 6,544 > \mathrm{e}^{0,193x+8,102}$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
$0,358x + 6,544 > 0,193x + 8,102 \iff 0,165x > 1,558 \iff x > \dfrac{1,558}{0,165}$.
Or $\dfrac{1,558}{0,165} \approx 9,4$. Le premier naturel supérieur à $\dfrac{1,558}{0,165}$ est donc 10 : en 2008 le nombre d'abonnés au fournisseur A dépassera le nombre d'abonnés au fournisseur B.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**1.** Il semble que le bénéfice maximal soit obtenu pour $x = 2$ et $y = 10$, ce bénéfice étant entre 5 et 5,5.
Le calcul exact donne $B(2\ ;\ 10) = 2^2 \times 10 \times \mathrm{e}^{-2} = 40\mathrm{e}^{-2} \approx 5,413$ millions d'euros.

**2.** **a.** On a donc $z_A = 1^2 \times 8 \times \mathrm{e}^{-1} = 8\mathrm{e}^{-1}$.
**b.** On a donc $8\mathrm{e}^{-1} = 2^2 y_E \times \mathrm{e}^{-2} \iff y_E = 2\mathrm{e}$.

**3.** Les points communs au plan d'équation $x = 1$ et à la surface $(S)$ ont des coordonnées qui vérifient : $z = y\mathrm{e}^{-1}$ : c'est l'équation d'une droite.
Comme $0 \leqslant y \leqslant 10$, l'intersection du plan et de la surface est donc un segment.




**4.** Les points communs au plan d'équation $y = 10$ et à la surface $(S)$ ont des coordonnées qui vérifient : $z = 10x^2\mathrm{e}^{-x}$.
Étude de la fonction sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ :
On a $z'(x) = 20x\mathrm{e}^{-x} - 10x^2\mathrm{e}^{-x} = 10x\mathrm{e}^{-x}(2 - x)$ qui est su signe de $2 - x$ car pour $x \geqslant 0$, $10x\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.

- $2 - x > 0 \iff 2 > x \iff 0 \leqslant x < 2$ : la fonction est croissante sur $[0\,;\,2]$ ;
- $2 - x < 0 \iff 2 < x \iff 2 < x \leqslant 5$ : la fonction est décroissante sur $[2\,;\,5]$ ;
- $2 - x = 0 \iff 2 = x$ ; $z'(2) = 0$, donc $z(2)$ est le maximum de la fonction sur $[0\,;\,5]$.

On a $z(2) = 40\mathrm{e}^{-2}$.
Ob retrouve comme à la question 1 que le bénéfice est maximal pour un investissement de 2 millions d'euros et une production de 10 millions d'unités.

**EXERCICE 3** **9 points**
**Commun à tous les candidats**

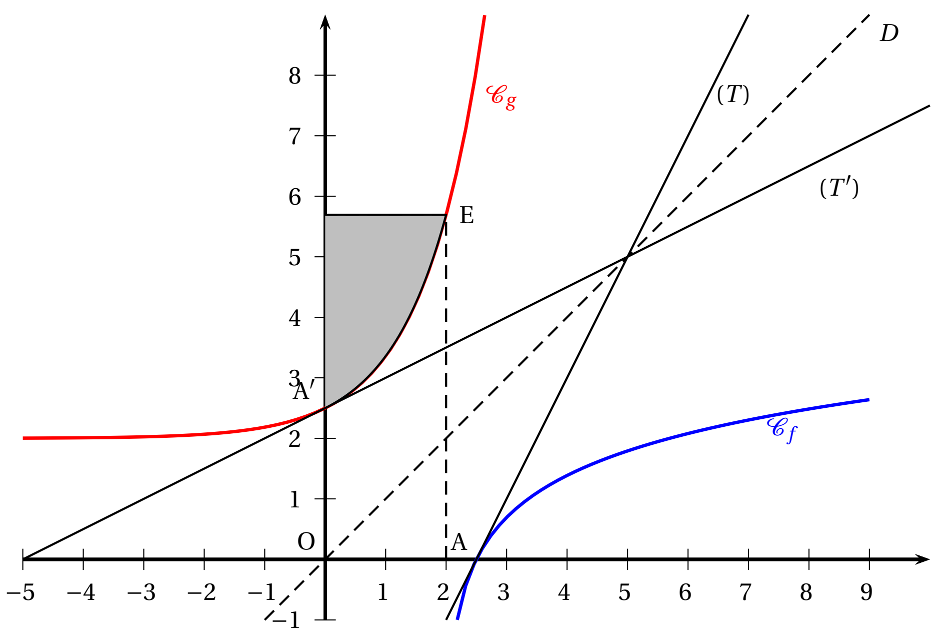
$$f(x) = \ln(2x-4).$$

1. **a.** • Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ;
   • Comme $\lim\limits_{x\to 2}(2x-4) =$, on a $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$.
   Géométriquement ceci signifie que la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de 2.

   **b.** Pour $x > 2$, la fonction est dérivable et
   $f'(x) = \dfrac{2}{2x-4} = \dfrac{1}{x-2}$.
   Comme $x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x-2} > 0$ ; donc $f'(x) > 0$ : la fonction $f$ est strictement croissante sur $]2\ ;\ +\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

   **c.** La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses au point $A$ d'abscisse $x$ telle que $\ln(2x-4) = 0 \iff 2x-4 = 1$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff 2x = 5 \iff x = \dfrac{5}{2}$.
   $\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{2}\ ;\ 0\right)$.

   **d.** Une équation de la tangente $(T)$ au point A est :
   $y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \iff y - 0 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right) \iff y = 2x-5$.




2. **a.** La droite $(T')$ a pour coefficient directeur $\dfrac{5-2,5}{5-0} = \dfrac{1}{2}$.

   **b.** • $\mathrm{A}'\left(0\ ;\ \frac{5}{2}\right) \in \mathscr{C}_g \iff \frac{5}{2} = a + b$ ;
   • $g(x) = a + b\mathrm{e}^x$, donc $g'(x) = b\mathrm{e}^x$, donc d'après le résultat de la question précédente :
   $g'(0) = \frac{1}{2} \iff b = \frac{1}{2}$.
   En reportant dans l'équation précédente :
   $\frac{5}{2} = a + \frac{1}{2} \iff 2 = a$. ' On a donc $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

**c.** Si $x = 2$, alors $g(2) = 2 + \frac{1}{2}\text{e}^2$. $\text{E}\left(2\ ;\ 2 + \frac{1}{2}\text{e}^2\right)$.

**d.** Par la symétrie autour de $y = x$ les coordonnées sont échangées, donc $\text{E}'\left(2 + \frac{1}{2}\text{e}^2\ ;\ 2\right)$.

**3. a.** Une primitive de la fonction $g$ est la fonction $G$ définie par
$G(x) = 2x + \frac{1}{2}\text{e}^x$, donc :
$\displaystyle\int_0^2 \left(2 + \frac{1}{2}\text{e}^x\right)\,\text{d}x = [G(x)]_0^2 = G(2) - G(0) = 2 \times 2 + \frac{1}{2}\text{e}^2 - \left(2 \times 0 + \frac{1}{2}\text{e}^0\right) =$
$4 + \frac{1}{2}\text{e}^2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\text{e}^2$.

**b.** L'aire $\mathscr{A}$ est égale à la différence de l'aire du rectangle de côtés [OA] et [AE] et celle de l'aire de la question précédente, d'où :
$\mathscr{A} = 2 \times \left(2 + \frac{1}{2}\text{e}^2\right) - \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\text{e}^2\right) = 4 + \text{e}^2\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\text{e}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{e}^2$.

**c.** La surface dont l'aire est à calculer est la symétrique autour de $(D)$ de celle de la question précédente, donc :
$\displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{2+\frac{1}{2}\text{e}^2} f(x)\text{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{e}^2$.